$Maths1(Analyse): \ T.D.N3$

Fonctions

Exercice1 : Calculez, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(3x)};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-1)}{x-1};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{3x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

Exercice2 : Calculez, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x};\quad \lim_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}};\quad \lim_{x\to 0}\left(1-tg^2(x)\right)^{cotg^2(x)}$$

Exercice3 : Expliquez pourquoi les fonctions ci-dessous sont discontinues pour la valeur de a donnée. Dessinez le graphe de ces fonctions.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1} \qquad a=-1$

$b)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1\\ 6, & x=-1\end{cases} \qquad a=-1$

$c)\ f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leq 2\\ x^2-2x, & x>2\end{cases} \qquad a=2$

Exercice4 : Vérifier que les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en :0

$$1)\frac{e^x-1}{x};\quad 2)\frac{xsin\frac{1}{x}}{logx};\quad 3)\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};\quad 4)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x;\quad 5)\frac{sinx}{log|x|};\quad 6)\frac{tgx-x}{x};\quad 7)xsin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Exercice5 : Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :

$f(x)=sinx;\ f(x)=cosx;\ f(x)=\dfrac{1}{1-x};\ f(x)=xe^x;\ f(x)=e^x sinx;\ f(x)sin^3x;$

$f(x)=log(1+x);\ f(x)=\dfrac{x^2}{1}+x;\ f(x)=xlog(x+1)$

Exercice6 : Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

$1)\dfrac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}}\leq (n+1)^\alpha-n^\alpha\leq\dfrac{\alpha}{n^{1-\alpha}};\quad \alpha\in]0,1[\ \ et\ \ n\geq 1.$

$2)\dfrac{x}{x+1}\leq log(x+1)\leq x;\quad \in]0,1[\ en\ déduire\ \lim_{x\to 0}\dfrac{log(x+1)}{x}=1$

$3)\dfrac{1}{2\sqrt{b}}\leq\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{a}};\quad avec\ \ 0<a<b;\quad 4)|\,sinx|\leq|x|\ \ pour\ \ tout\ \ x\in\mathbb{R}$

$5)\dfrac{x}{x^2+1}\leq arctgx\leq x;\ \ pour\ \ tout\ \ \geq 0$

Exercice7 : Soit $f:x\to\dfrac{x^4}{1+x^6}$. Déterminer $f^n(0)$.

Exercice8 : Soient a,b,c trois réels. On considère la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$.

Déterminer $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\beta) - f(\alpha) = (\beta - \alpha) f'(c)$

Exercice9 : Ecrivant la formule des accroissements finis sous la forme :

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$$

montrer en calculant qu'il existe un seul nombre c dans chacun des cas suivants :

$1) f(x) = x(x-1); \quad a = 0 \quad b = 1$

$2) f(x) = x(x-1); \quad a = 1 \quad b = 2$

$3) f(x) = sinx + 2x; \quad a = 0 \quad b = \pi$

Exercice10 : Calculer les développements limités suivants :

$1)\frac{1}{1-x} - e^x$ à $l'ordre \ 3 \ en \ 0$; $2)\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à $l'ordre \ 4 \ en \ 0$

$3) sinxcos(2x)$ à $l'ordre \ 6 \ en \ 0$; $2) cosx \ln(1+x)$ à $l'ordre \ 4 \ en \ 0$

$5) (x^3+1)\sqrt{1-x}$ à $l'ordre \ 3 \ en \ 0$; $6) (\ln(1+x))^2$ à $l'ordre \ 4 \ en \ 0$

Exercice11 : En utilisant les développements limités, déterminer les limites des fonctions suivantes :

$1)\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}, \ en \ 0; \ 2)\frac{x^{x^x} lnx}{x^x - 1} \ en \ 0^+; \ 3)\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \ en \ 0; \ 3)\left(\frac{e^{sinx} - e^{tgx}}{sinx - tgx}\right) \ en \ 0$

Exercice12 : Calculer

$a)\cos(\arctan x)$; $b)\sin(\arctan x)$; $c)\cos(\arcsin x)$; $d)\sin(\arccos x)$;

$e)\tan(\arcsin x)$; $f)\tan(\arccos x)$

Exercice13 : Calculer les nombres suivants

$a)\arcsin(\sin\frac{18\pi}{5})$; $b)\arccos(\sin\frac{18\pi}{5})$; $c)\sin(\arcsin\frac{1}{3})$; $d)\tan(\arctan\frac{\pi}{2})$

Exercice14 : Résoudre les équations suivantes :

$a)\arctan(2x) + \arctan x = \pi/4$; $b)\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \pi/2$;

$c)(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$

Exercice15 : Soit x réel. On pose $t = \arctan shx$.

Montrer que : $\tan t = shx$, $\sin t = thx$, $\cos t = \frac{1}{chx}$

Exercice16 : Montrer que si x est réel, on a $chix = \cos x$ et $shix = i\sin x$.

Exprimer de même $\cos ix$ et $\sin ix$, en fonction de chx et de shx, et indiquer comment l'on passe des formules trigonométriques usuelles aux formules de trigonométrie hyperbolique. Ecrire par exemple : $ch(x+y)$, $ch2x$ et $sh2x$.