Ch.3 Potentiel Électrique

CUAT-IST 07.04.2010 K.Demmouche (cours 3 E&M)

Une particule chargée placée dans un champ électrique est soumise à la force selon la loi de Coulomb. Dans le cas d´un champ uniforme une particule lâchée sans vitesse initiale dans ce champ va suivre un mouvement rectiligne sur la même direction des lignes du champ qui sont dans ce cas des droites. C´est le même cas connu pour le champ de gravitation, si on lâche une masse sans vitesse initial à une auteur donnée du sol, elle va tomber en chute libre suivant la verticale qui est la direction des lignes de force gravitationnelle.

On général si la particule chargée est placée dans un champ qui a une configuration quelconque (non uniforme) la particule va suivre une trajectoire plus complexe en fonction de la configuration du champ. Celà veut dire que les lignes du champ ne sont pas des trajectoires pour la particule, puisque la force appliquée sur la particule se trouvant sur une ligne donnée lui pousse dans la direction tangentielle à la ligne et ainsi de suite.

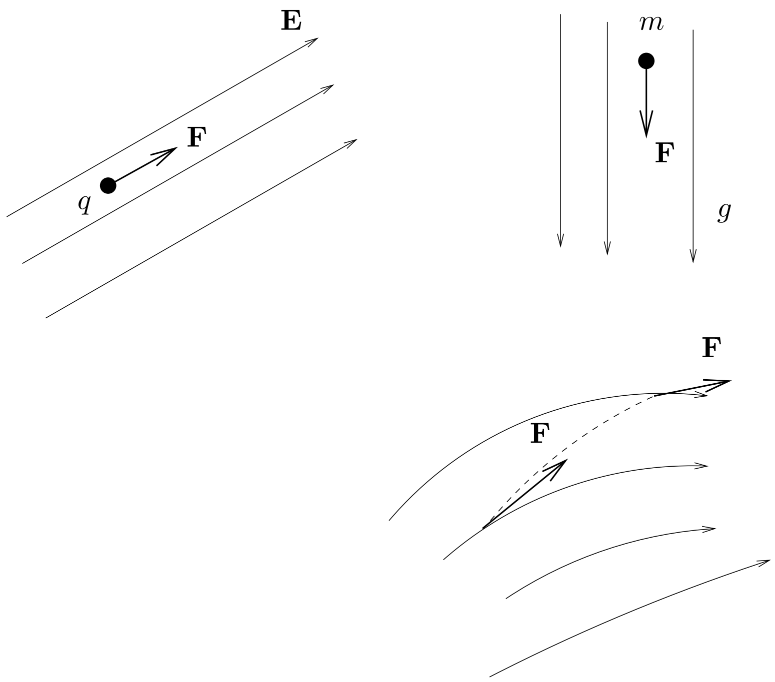

Fig 3.1 mouvement dans un champ électrique

On veut dans ce chapitre étudier le travail fourni lors du déplacement de la particule en présence du champ électrique.

3.1 Travail des forces du champ

Soit une particule de charge q' placée dans un champ électrique $\mathbf{E}$. Ce champ exerce une force $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$ sur la particule qui se déplace avec $d\mathbf{l}$.

Cette force donc fourni un travail élementaire lors de ce déplacement élementaire qui est

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q' E dl \cos\theta. \tag{1}$$

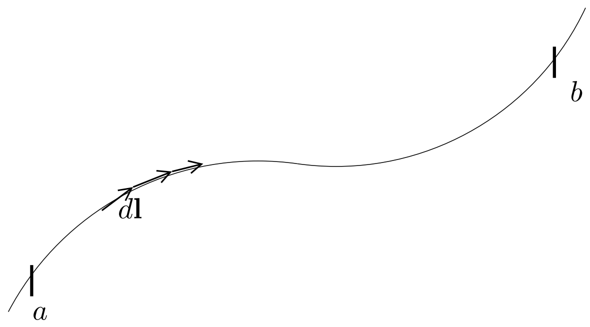

Fig 3.2.1 déplcement dans un champ uniforme et quelconque.

Le travail total entre deux positions A et B est la somme de touts les travaux élementaires

$$W_{A\to B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{2}$$

la quantité $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ est appelée **circulation** du champ $\mathbf{E}$ le long de la courbe de A jusqu´ à B.

On peut démontrer que le travail $W_{A\to B}$ ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B et qu´il ne dépend que de la position initial et final de la particule q'.

Puisque le champ exèrce sur la particule une force et que du travail a dû être fourni pour amener la charge en un point donné du champ, la charge possède donc *une energie potentielle* E_p.

Calculons l´energie potentielle E_p. On suppose que le champ électrique est créé par une charge q placée en O et on veut déplacer la charge q' de l´infini à une position A à la distance R de O.

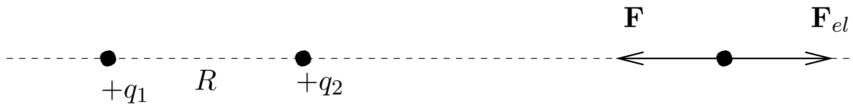

Fig 3.2 Travail pour ramener une charge de l´infini

Supposons que les deux charges sont positives, la force électrique $\mathbf{F}_{el}$ appliquée sur q' est répulsive, donc il faut appliquer une force $\mathbf{F}$ opposée à $\mathbf{F}_{el}$ pour ramener la particule de l´infini à A.

$$W = \int_\infty^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^\infty \mathbf{F}_{el} \cdot d\mathbf{r} \tag{3}$$

On connais la force $\mathbf{F}_{el}$, le déplacement est dans le même sens du mouvement $\cos\theta = 1$, on obtient

$$W = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\frac{-1}{r}\Big|_R^\infty \tag{4}$$

Le travail ou bien l´energie du travail qui doit être fourni pour ramener la particule en A est

$$E_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R} \quad [j]\,. \tag{5}$$

Pour q et q' de même signe le travail fourni est positif, alors qu´il est négatif s´ils sont de signe opposé.

Si au lieu de parcourir une droite pour ramener la particule en A on a suivi un chemin quelconque on devait trouver le même résultat.

3.2 Potentiel électrique

On considère une charge $+Q$ placée en O et créée un champ électrique dans tout l´espace. Soit une particule test q placée en A à la distance R de O. On sait que le travail que doit être fourni pour ramener la charge test de l´infini en A est donné par

$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R}. \tag{6}$$

Le potentiel électrique V en un point est défini comme le travail pour le ramener de l´infini en ce point par unité de charge placée en ce point.

$$V = \frac{E_p}{q} \quad [j/C] = [V] \text{ (Volt)}. \tag{7}$$

donc si on remplace dans (**??**) on trouve

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \tag{8}$$

Le potentiel est donc un scalaire qui positive ou négative selon le signe de la charge Q. ce potentiel décroit en $1/R$, et à l´infini il s´annule:

$$V_\infty = 0. \tag{9}$$

En tout point P de l´espace le potentiel est donc

$$V_p = \int_R^\infty \frac{\mathbf{F}_{el}}{q}\cdot d\mathbf{r} = \int_R^\infty \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

Considérons deux points A et B séparés par une distance d et déterminons le potentiel en ces deux points. On a

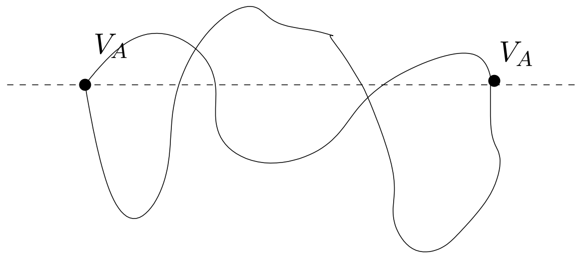

Fig 3.3 différence de potentiel.

$$V_A = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{11}$$

$$V_B = \int_B^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{12}$$

Cependant la différence de potentiel entre A et B est

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{13}$$

qu´ on peut l´écrire aussi

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{14}$$

La différence de potentiel est égal au travail fourni à la charge *unité* pour la transporter de A à B pris en signe négatif (aussi appelé circulation de $\mathbf{E}$).

L´intégrale $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ ne dépend que de la valeur du potentiel en point A et B, celà veut dire on pourrait choisir un chemin quelconque menant de A à B, la valeur de l´intégrale reste inchangée et donc le champ électrique est *conservative.*

Et en général on a

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{15}$$

Remarquons que si A coincide avec B (chemin fermé) on aura

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{16}$$

Qui indique que le travail fourni par $\mathbf{E}$ à une unité de charge effectuant un circuit fermé est nul. $\mathbf{E}$ est donc conservative, il dérive d´un potentiel.

3.2.1 Potentiel électrique dans un champ uniforme

Soit $\mathbf{E}$ un champ électrique uniforme parallél á (Ox) et soit une charge positive se déplaçant sur l´axe (Ox).

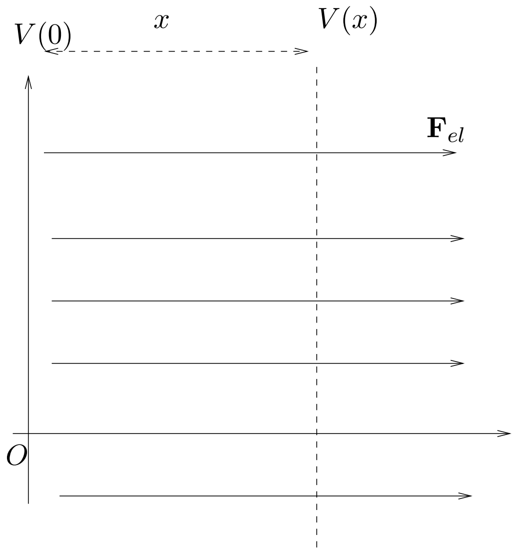

Fig 3.4 potentiel dans un champ uniforme

La différence de potentiel entre O et un point situant à une distance x est

$$\int_0^x E dx = V(0) - V(x). \tag{17}$$

Si on prend comme référence du potentiel à $x = 0$ on aura $V(0) = 0$, on obtient

$$V(x) = -Ex \tag{18}$$

Le champ électrique est dirigé dans les sens des potentiels électrique décroissant.

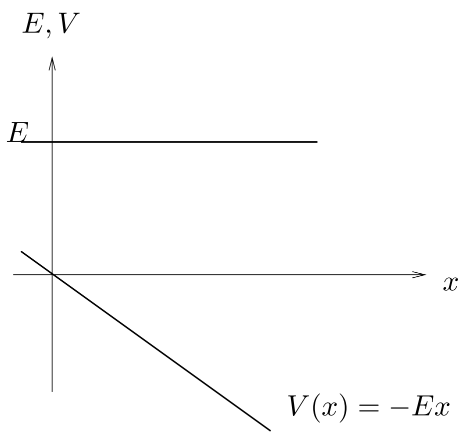

Fig 3.5 Variations de E et de V pour un champ uniforme.

3.2.2 Potentiel électrique d´une charge ponctuelle

On a déjà vu que le potentiel électrique en touts point du champ électrique créé par une charge ponctuelle q est donné par

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{19}$$

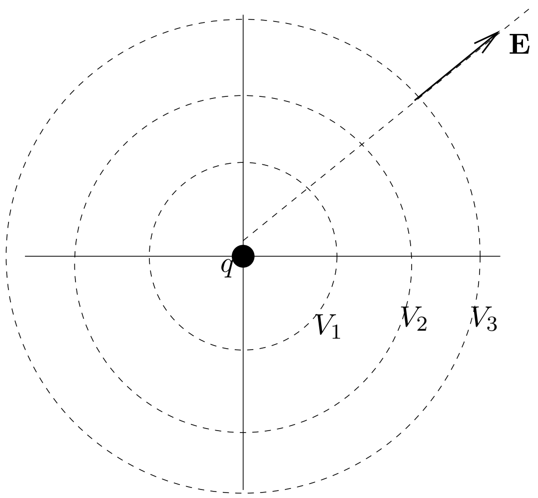

Fig 3.5 Surfaces équipotentielles.

Touts les points se trouvant à la distance r de O ont la même valeur du potentiel $V = const.$ Ils constituent dans ce cas des sphères de rayon r centrèe en O. On appele ces sphères les *surfaces équipotentielles*. Le champ $\mathbf{E}$ est perpondiculaire à la surface équipotentielles en tout point.

Imaginons qu´une charge se déplace perpondiculairement aux lignes du champ donc $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, celà dit aucun travail est fourni (aucune différence de potentiel) est par la suite la surface sur laquelle la charge se déplace a le même potentiel en tout point. Donc le champ électrique **doit** être perpondiculaire aux surfaces équipotentielles.

3.2.3 Potentiel électrique de plusieurs charges ponctuelles

Si on place deux charge $+q_1$ et $-q_2$ dans l´espace et on se demande la valeur du potentiel en un point donné P.

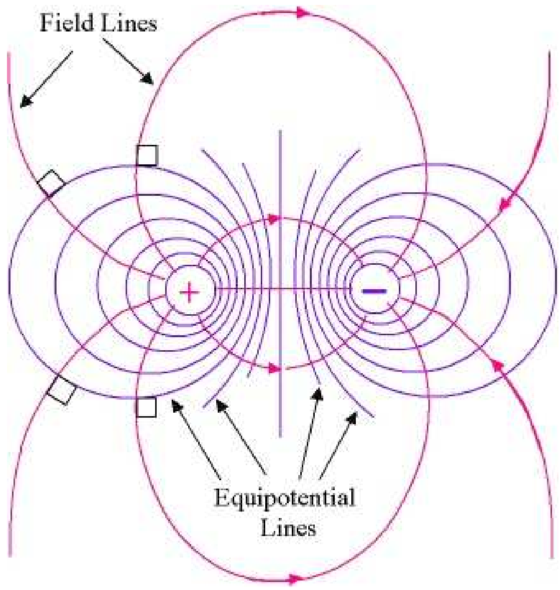

Fig 3.6 Potentiel de deux charges

Le potentiel en P est la somme du potentiel en P comme si $+q_1$ était toute seule et le potentiel en P comme si $-q_2$ était toute seule:

$$V_P = V_1 + V_2. \tag{20}$$

où V_1 est positif alors que V_2 est négatif à cause du signe des charges. Donc s´il on rapproche de $+q_1$ le potentiel devient positif ou négatif s´il on rappoche de $-q_2$. Ainsi il y aura des surfaces équipotentielles positive et négatives et donc il existe une surface équipotentielle où le potentiel s´annule.

On général, le potentiel de plusieurs charges $q_1, q_2, \ldots$ en un point P est la somme de leurs potentiels individuels

$$V_p = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \cdots = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \tag{21}$$

3.2.4 Potentiel de distribution continue des charges

Dans ce cas on dévise la charge totale Q en charge élémentaire dQ, en suite on doit procéder à une intégration pour calculer le potentiel total:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r}. \tag{22}$$

Exemple: Cercle chargé

On considère un cercle de rayon R chargé linéairement avec une densité de charge λ. On cherche le potentiel en un point P situé sur l´axe du cercle à la distance h de O.

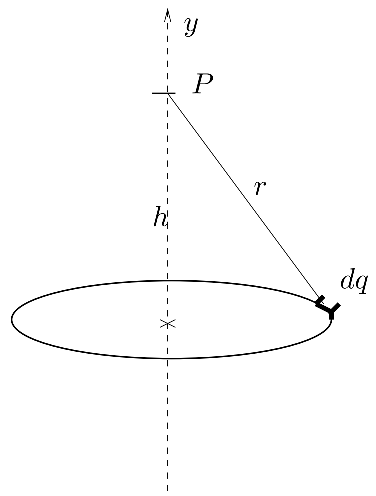

Fig. 3.7 Potentiel du cercle chargé

Pour toute charge élémentaire r est constant

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int dQ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C. \tag{23}$$

et on a

$$Q = 2\pi R\lambda \tag{24}$$
$$r = \sqrt{h^2 + R^2} \tag{25}$$

Le potentiel en tout point sur l´axe

$$V(h) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0\sqrt{h^2 + R^2}} + C \tag{26}$$

où C est une constante fixée par le choix de la référence pour le potentiel nul.

3.3 Applications

3.3.1 Potentiel d´une sphére chargée à la surface

On considère une sphère centrée en O et de rayon R chargée en surface en Q. On a vu dans le chapite précédent que le champ à l´extérieur de la sphère est donné par la formule du champ créé par une seule charge placée en O et portant la chare Q. Alors que Le champ à l´intéreiur de la sphère est nul.

Calculons le potentiel en tout point de l´espace.

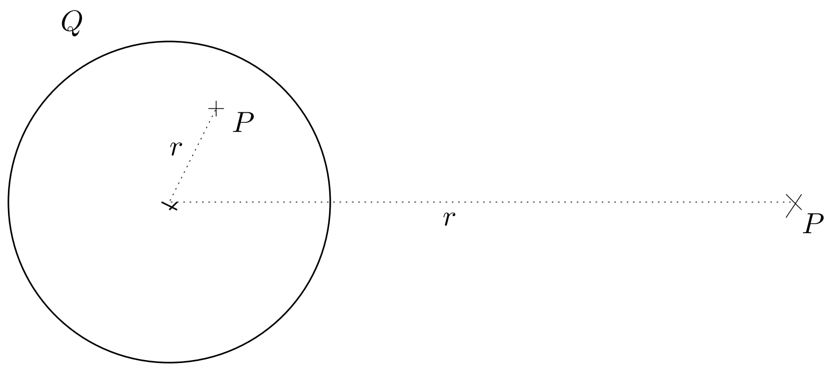

Fig. 3.8 Potentiel d´une sphére chargée à la surface

Le potentiel à l´extérieur de la sphére est donné donc avec la même relation pour une charge ponctuelle:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ pour } r > R. \tag{27}$$

Rappelons nous que si on ramène une charge q de l´infini à un point placé à r du centre, on fourni un travait qui est

$$W = qV(r) \tag{28}$$

En arrivant sur la sphère, cette valeur est

$$W = qV(R). \tag{29}$$

Mais en allant à l´intérieur du cercle aucun travail doit être fourni en plus de $qV(R)$ puisque aucune force n´est appliquée sur la charge q à cause que le champ électrique à l´intéreiur du cercle est nul. Celà veut dire que le potentiel à l´intérieur de la sphère doit rester constant et il a la valeur $V(R)$.

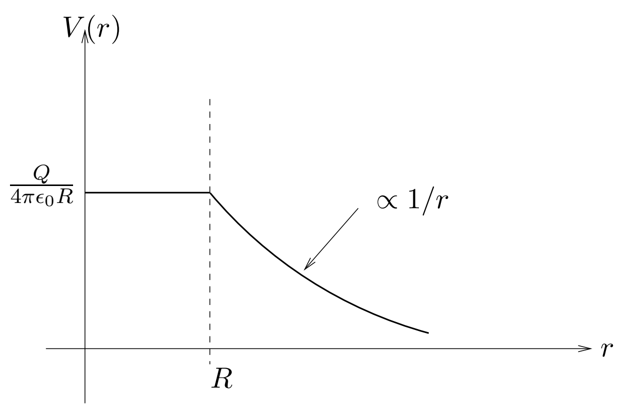

Fig. 3.9 Variations de $V(r)$ pour la sphére chargée.

Exercice

On donne $R = 0.3$ m et $Q = +10\mu$C. Calculer le potentiel V á la distance R, 0.6 m et 3 m et à l´infini. On donne $k_e = 9\,10^9$ Nm.

3.3.2 Mouvement d´un éléctron

On considère deux points A et B situés sur deux surfaces équpotentielles $V_A = 150$ V et $V_B = 50$ V. Ceci veut dire si on veut déplacer une charge de 1 C de l´infini vers A par exemple on doit fournir un travail de 50 j , alors que pour aller encore à B qui est relativement proche de A on doit fournir en plus 100 j de travail.

Si la charge est maintenant lâcher en A elle va se déplacer vers B la différence en energie potentielle $q(V_A - V_B)$ va se transformer en energie cinétique, c´est donc la loi de conservation de l´energie comme pour la gravitation puisue la force électrique est conservative.

$$q(V_A - V_B) = E_{cB} - E_{cA} \tag{30}$$

Supposons maintenant qu´on va lâcher un éléctron sans vitesse initiale en point B de potentiel bas, l´éléctron va se déplacer vers le potentiel haut en A et sans savoir la configuration du champ on peut calculer la vitesse avec la quelle l´éléctron arrive en A.

$$-e(V_A - V_B) = -\frac{1}{2}m_e v_A^2 \tag{31}$$

On obitent

$$v_A \sim 6\ 10^6 \text{ m/s}. \tag{32}$$

Le fait de connaitre la différence de potentiel nous a permis de calculer sans difficulté la vitesse de l´éléctron sans connaitre la forme du champ électrique.

3.4 Relation entre champ et potentiel

Considérons le cas d´une charge ponctuelle Q. Le potentiel de cette charge en un point P à la distane r est

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{33}$$

et le champ créé en ce point est

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r. \tag{34}$$

Si on calcul la dérivée de $V(r)$ par rapport à r, on a

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -E_r(r) \tag{35}$$

Et puisque le champ électrique créé par une charge ponctuelle est radial, on peut écrire

$$\mathbf{E} = -E_r \mathbf{e}_r = -\frac{dV}{dr}\mathbf{e}_r. \tag{36}$$

Donc sachant le potentiel en tout point de l´espace, on peut déterminer le champ électrique en tout point.

Plus général, considérons le mouvement d´une charge dans un champ électrique décrivant une trajectoire quelconque. Calculons la circulation de $\mathbf{E}$ le long de cette trajectoire.

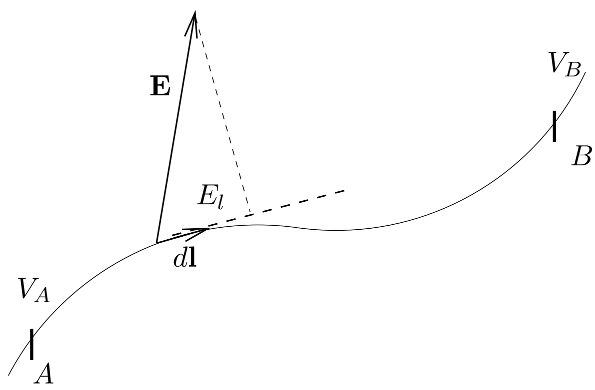

Fig 3.10 Circulation du champ électrique.

On a vu que la circulation du champ $\mathbf{E}$ le long d´une courbe entre la position A et B est simplement donnée par la différence de potentiel entre ces deux points, autrement

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B. \tag{37}$$

La projection de $\mathbf{E}$ sur $d\mathbf{l}$ est

$$E_l = E \cos \widehat{(\mathbf{E}, d\mathbf{l})} \tag{38}$$

La relation en (**??**) s´écrit

$$\int_A^B E_l dl = V_A - V_B = -\int_A^B dV. \tag{39}$$

Supposons que A et B sont si rapprochés que chacune des intégrales se ramène à un simple terme:

$$E_l dl = -dV \text{ ou } E_l = -\frac{dV}{dl} \text{ [V/m] .} \tag{40}$$

La composante du champ électrique dans une direction donnée est égale à la variation (changée de signe) du potentiel électrique par unité de longueur dans le même direction.

Par example, les composantes cartésiènnes de **E** sont données par

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ , \ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \ , \ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{41}$$

Le champ électrique s´écrit donc

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right). \tag{42}$$

Plus compact ça donne

$$\mathbf{E} = -\overrightarrow{grad} V. \tag{43}$$

Cette équation permet de trouver le champ électrique quand le potentiel électrique est connu et réciproquement.

Il en résulte qu´il est en général plus facile de calculer le potentiel et d´en dériver le champ électrique.

Exemple: Cercle chargé

On a vu déjà que le potentiel d´un cercle chargé en un point P se trouvant sur l´axe du cercle à la hauteur y est

$$V(y) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{1}{(y^2 + R^2)^{1/2}} + C. \tag{44}$$

Le champ électrique est donc

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} = \frac{\lambda R y}{2\epsilon_0 (y^2 + R^2)^{3/2}}\mathbf{j}. \tag{45}$$

Exemple: Un fil de longueur infini

Calculer le potentiel.

On a vu que le champ créé par un fil infini en un point de l´espace est radial et ne dépend que de la distance du point de l´axe du fil. On avait

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\mathbf{e}_r. \tag{46}$$

On applique la relation avec le potentiel, on a

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{47}$$

donc

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r + C. \tag{48}$$

On choisi $V(r = 1) = 0$ on a donc $C = 0$.

Le potentiel d´un fil infini s´écrit

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r. \tag{49}$$

Exemple: Conducteur solide

Dans un conducteur solide en équibre électrostatique le champ électrique est nul. Les charges à ´intérieur vont s´arrangées d´une manière à annuler le champ. Si le champ est nul en tout point du conducteur, ce conducteur constitue une surface équipotentiel puisque.

$$-\frac{dV}{dr} = E = 0 \iff V = const. \tag{50}$$

Tout conducteur solide est en lui même une surface équipotentielle.

3.5 Forme différentielle de théorème de Gauss

Nous avons vu que le théorème de Gauss peut être appliqué à une surface fermée de forme quelconque S. Il s´écrit

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \tag{51}$$

où Q est la charge contenu dans le volume V délimité par la surface S. Mais Q distribuée avec une densité de charge volumique ρ ´écrit

$$\mathbf{Q} = \int_V \rho dV. \tag{52}$$

D´autre part si on applique le théorème de Gauss-Ostrogradski (voir Ch. Introduction) pour le terme à gauche de l´éq. (**??**) on obtient

$$\int_V div\mathbf{E}dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}dV \tag{53}$$
$$\int_V \left(div\mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right) dV = 0. \tag{54}$$

Et puisque cette équation est vraie pour tout le volume, on a

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{55}$$

Cette forme différentielle du théorème de Gauss relie le champ électrique **E** en un point de l´espace à la distribution de charge, caractérisée par ρ, au *même* point de l´espace $\rightarrow$ c´est une relation *local.*

Sachant maintenant que le champ électrique dérive d´un potentiel $\mathbf{E} = -\nabla V$ ou bien $(E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \ldots)$ et en remplaçant dans (**??**) on obtient *l´équation de Poisson*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{56}$$

En connaissant la distribution de charge en un point on peut donc obtenir le potentiel électrique. dans un espace libre où il n´éxiste pas de charges, $\rho = 0$, on obtient *l´équation de Laplace*

$$\triangle V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{57}$$

3.6 Dipôle électrique

Le dipôle électrique consiste en deux charges égales et opposées $+q$ et $-q$ séparées apr une très petite distance a.

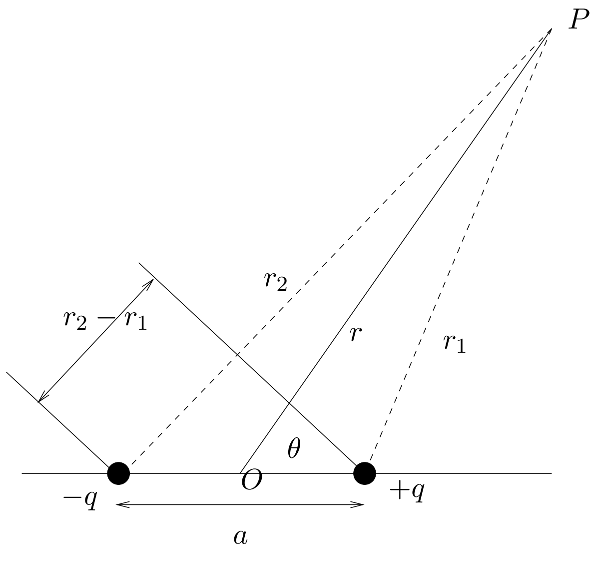

Fig 3.11 Dipôle électrique.

Le potentiel en un point P situè à une distance $r >> a$ de O est la somme des potentiels en ce point de chacune des charges

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}. \tag{58}$$

Pour $r >> a$ on peut écrire

$$r_2 - r_1 = a\cos\theta \;\; et \;\; r_1 r_2 = r^2 \;, \tag{59}$$

ce qui donne

$$V(r,\theta) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{60}$$

Pour obtenir le champ $\mathbf{E}$ créé par le dipôle en point P on utilise $\mathbf{E} = -\overrightarrow{grad}V$ qui s´écrit en coordonnées polaires

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \tag{61}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}. \tag{62}$$

On obtient

$$E_r = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{63}$$

$$E_\theta = \frac{aq\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{64}$$

Le champ électrique créé par un dipôle décroit en $1/r^3$ qui est plus rapide que la décroissance du champ créé par une charge ponctuelle qui est en $1/r^2$.

Exercice:

Refaire le calcul du potentiel et le champ électrique en utilisant les coordonnées cartésiènnes.