Ch.2 Le champ Électrostatique

CUAT-IST 14.03.2010 K.D (cours 2 E&M)

L´intéraction électrique entre les charges est gouvernée par la loi de Coulomb, il est donc naturel de se poser la question: comment ces charges subit l´action de la force électrique en l´abscence d´un mileu matériel ? en fait, toute région dans laquelle une charge électrique subit une force est appelé un *champ électrique*.

2.1 Champ électrique

Soit une charge q placée dans une région où se trouvant d´autres charges $q_1, q_2, \dots$, donc elle soumise à la force $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$, nous disons que q est placée dans un champ électrique créé par $q_1, q_2, \dots$.

La force résultante $\mathbf{F}$ est bien evidemment proportionnelle à q puisque les forces $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ qu´exerce les charges $q_1, q_2, \dots$ sur q sont proportionnelle à q. On note q par q_0, la force F s´écrit donc

$$\mathbf{F} = q_0 \sum_j k \frac{q_j}{r_{0j}^2} \frac{\mathbf{r}_{0j}}{r_{0j}} \tag{1}$$

où $\mathbf{r}_{0j}$ est le vecteur dont le module est la distance entre q_0 et q_j.

On pose

$$\mathbf{E} = \sum_j k \frac{q_j}{r_{0j}^2} \frac{\mathbf{r}_{0j}}{r_{0j}} \tag{2}$$

Cette quantité $\mathbf{E}$ est appelée le champ électrique créé par les charges $q_1, q_2, \dots$. Donc la force électrique $\mathbf{F}$ peut s´écrire

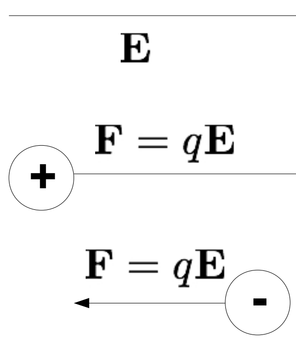
$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} \tag{3}$$

et

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \tag{4}$$

Le champ électrique E est exprimé par NC^{-1} soit en unités fondamentales, $\mathrm{m\ kg\ s^{-2}C^{-1}}$.

Donc si q_0 est positive le champ $\mathbf{E}$ a le même sens que la force $\mathbf{F}$ agissant sur q_0, par contre si q_0 est négative, le champ $\mathbf{E}$ a un sens opposé à $\mathbf{F}$.

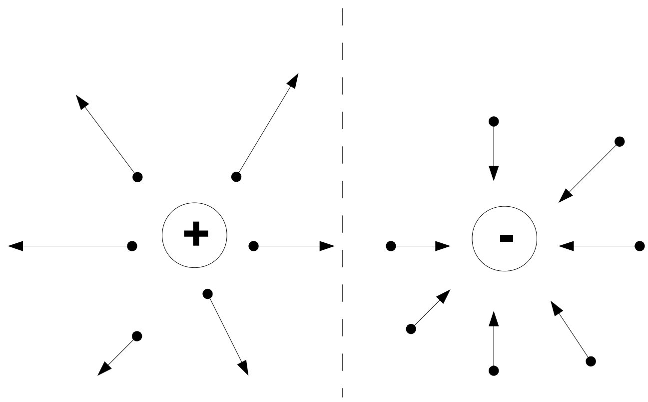


2.1.1 Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Si au lieu d´un ensemble de charges $q_1, q_2, \ldots$ on a qu´une charge q_1 placée à l´origine O l´équation (**??**) devient

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = k\frac{q_1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{5}$$

qui est le champ électrique créé par q_1 en tout point se trouvant à une distance r de q_1. Ce champ électrique est radial càd dans sur la direction de $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ est sa direction ne dépend que du signe de la charge q_1. Il est donc dirigé vers une charge négative et part d´une charge positive. Le sens du champ électrique au voisinage d´une charge électrique q est représenté dans la figure suivante



2.1.2 Champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Sin on reconsidère maintenant n charges électriques q_i qui sont présentent en différents points P_i on a vu que la force exercée sur la charge test q était la résultante des forces appliquées par chacune des charge q_i (voir éq.(**??**)). Alors que chaque charge q_i crée son propre champ électrique $\mathbf{E}_i$, on écrit donc

$$\mathbf{F} = q\sum_i \mathbf{E}_i = q\mathbf{E} \tag{6}$$

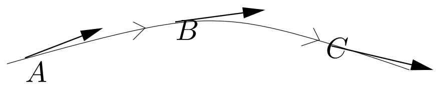
celà veut dire que le champ électrique totale appliqué sur q située en un point donné P est la résultante vectorielle des champs électriques produits par chacune des charge q_i en ce point, soit

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \tag{7}$$

Donc enfin, le champ électrique obeit le principe de superposition comme pour les forces.

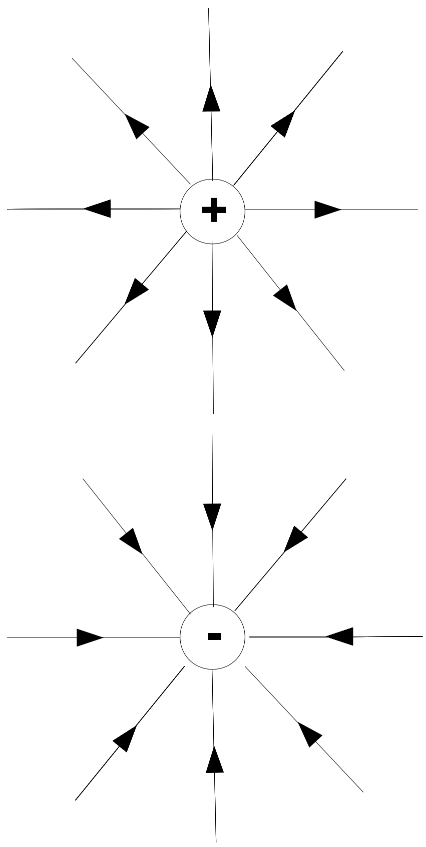
2.1.3 Lignes du champ électrique

Comme dans le cas du champ gravitationnel, un champ électrique peut être représenté par ses lignes de force qui sont des lignes orientées tangentes en chaque point au champ électrique et passant par la charge q.



L´orientation de la ligne du champ indique le sens du champ électrique en tout point de la ligne. Les lignes du champ se croisent seulement en point où la charge est située.

Comme pour le champ électrique, les lignes du champ électrique pour une charge positive ponctuelle sont des demi-droites partant de la charge vers l´infini, Alors ue pour une charge négative, les lignes du champ converge vers la charge.



Lignes du champ électrique.

La densité des lignes dépend de l´intensité du champ électrique, et puisque E décroit avec r^2 la densité des lignes diminue lorsqu´on s´éloigne de la charge.

Lignes du champ électrique produit par deux charges

2.2. Applications: Champ électrique créé par une distribution continue de charges

Dans le cas où les dimensions du corps chargé sont importantes telqu´on puisse pas le considérer comme charge ponctuelle, il faut savoir la distribution des charges dans ce corps. Celà peut avoir une répartition uniforme suivant une droite, une surface plane ou un volume.

Dans ce cas on considère par exemple un élément de volume ΔV contenant une charge ΔQ, la densité de la charge (comme la densité de masse) soit

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{8}$$

Donc la densité de charge se calcul par la charge de l´unité de volume. La charge dQ contenu dans l´élément de volume dV est donnée par

$$dQ = \rho dV. \tag{9}$$

De la même façon si la charge est réparti sur une surface, la densité de charge s´écrit

$$dQ = \sigma dS \tag{10}$$

où dans le cas où la charge est distribuée linéairement la densité est

$$dQ = \lambda dl. \tag{11}$$

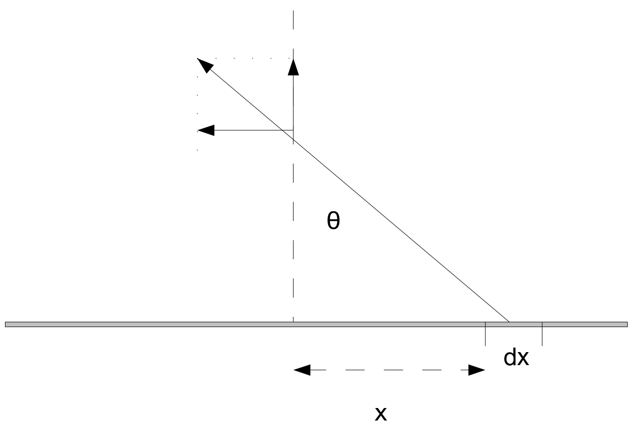
La densité est généralement une fonction du point.

La charge élémentaire dQ crée un champ électrique $d\mathbf{E}$ en un poit P de l´espace. Le champ total est obtenu à la fin par la somme de tous les champs électriques crée par chacune de charge élémentaire dQ en transformant la somme $\sum$ en intégrale $\int$.

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}. \tag{12}$$

A. Champ électrique produit par un fil de longueur infinie chargé uniformément

On considère un fil de longueur infinie d´épaiceur négligeable où la charge est ditrubuée linéairement avec une densité linéaire constante λ. On divise le fil en petits éléments linéaires dx portant la charge élémentaire $dQ = \lambda dx$. On veut calculer le champ $\mathbf{E}$ crée par le fil en un point P situé à une distance R du fil.



On a

$$d\mathbf{E} = dE_x\mathbf{i} + dE_y\mathbf{j} \tag{13}$$

ainsi

$$dE_x = dE\sin\theta \text{ et } dE_y = dE\cos\theta. \tag{14}$$

donc

$$\begin{aligned} dE_x &= k\frac{dQ}{r^2}\sin\theta = k\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta & (15)\\ dE_y &= k\frac{dQ}{r^2}\cos\theta = k\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta & (16) \end{aligned}$$

on a aussi

$$\tan\theta = \frac{x}{R} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{dx}{R} \tag{17}$$

et

$$r = \frac{R}{\cos\theta} \tag{18}$$

en remplaçant dans (**??**) et (**??**) on obtient

$$\begin{aligned} dE_x &= k\frac{\lambda d\theta}{R}\sin\theta & (19)\\ dE_y &= k\frac{\lambda d\theta}{R}\cos\theta & (20) \end{aligned}$$

quand x varie entre $-\infty$ et $+\infty$ l´angle θ varie entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ donc

$$\begin{aligned} E_x = \int dE_x &= \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\sin\theta & (21)\\ E_y = \int dE_y &= \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\cos\theta & (22) \end{aligned}$$

ceci donne

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 && (23) \\
E_y &= 2\lambda/R. && (24)
\end{aligned}
$$

Enfin on a

$$\mathbf{E} = 2\frac{\lambda}{R}\mathbf{j}. \qquad (25)$$

Le champ électrique produit par un fil est proportionnel à al distance et il est normale au fil. Il sorte du fil si le fil est chargé positivement ou il est dirigé vers le fil s´il est chargé négativement.

B. Champ électrique produit par un disque fin chargé uniformément

....

C. Champ électrique produit par un plan infini chargé uniformément

......

3. Le flux électrique et théorème de Gauss

3.1. Flux électrique

Dans le chapitre d´introduction on a introduit la notion du flux d´un champ vectoriel à travers une surface (ouverte ou fermée). De la même façon on défini le flux électrique du champ électrique **E**.

Flux à travers une surface (ouverte).

Soit **E** le champ électrique ayant une configuration quelconque du lignes du champ et soit $d\mathbf{S}$ vecteur de l´élément de surface orientée, donc l´élément du flux électrique est donné par

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E.S.\cos\theta. \qquad (26)$$

où θ est l´angle compris entre $\mathbf{E}$ et $d\mathbf{S}$. L´unité du flux électrique et

$$[\Phi] = \left[\frac{N}{C} m^2\right] = Wb \tag{27}$$

qui est appelée **Weber**.

Le flux est donc une quantité scalaire, cela veut dire qu´elle peut être positive, négative ou bien nulle.

3.2. Théorème de Gauss

Ce théorème permet le calcul du flux électrique à travers une surface fermée en fonction des charges électrique enfermées à l´interieur de cette surface.

On prend une charge ponctuelle positive $+q$ et on calcul le flux du champ électrique produit par cette charge à travers une sphère de rayon R centrée on $+q$.

Flux à travers une sphére.

Le flux de $\mathbf{E}$ s´écrit

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \tag{28}$$

mais dans le cas d´une sphère $\mathbf{E}$ et $d\mathbf{S}$ sont radiaux, ce qui donne

$$\Phi = \oint_S E.dS. \tag{29}$$

En plus en tout point sur la sphère le module de $\mathbf{E}$ est constant et donc le flux est simplement le produit de E par l´aire S de la sphère, on a

$$\Phi = E.S = 4\pi R^2 E. \tag{30}$$

Mais E à la distance R est

$$E_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \tag{31}$$

On remplace dans (**??**) et on trouve

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{32}$$

Le flux électrique à travers la sphère est indépendant du rayon R, il est le quotient de la charge se trouvant à l´interieur de la sphère par la constante ϵ_0.

Puisque le flux ne dépend que de la charge à l´interieur de la surface fermée, le résultat (**??**) reste aussi valable si on considère une autre surface fermée autre que la sphère.

On peut maintenant généraliser ce résultat pour le cas de plusieurs charges électriques puisque on sait que le champ électrique totale est la superposition des champs électriques produit par chacune des charges. On arrive donc à l´énnoncé du **théorème de Gauss**:

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est la somme de toutes les charges se trouvant à l´interieur du volume délimité par cette surface divisée par la permittivité du vide ϵ_0.

On écrit

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}. \tag{33}$$

Le théorème de Gauss a une grande utilité pour simplifier la calcul du champ électrique produit par différentes distributions de charges.

3.2.1. Champ électrique d´une sphère chargée superficiellement

Sphère chargée uniformément en surface.

Considérons une sphère de rayon R et de charge $+Q$ distribuée uniformément sur sa surface. La symétrie du problème suggère que le champ en chaque point doit être radial et dépendre uniquement de la distance r du point au centre de la sphère.

En traçant une surface sphérique S de rayon r concentrique à la sphère chargèe, le module de $\mathbf{E}$ on tout point de cette sphère est le même. Nous trouvant pour le flux électrique

$$\Phi = E(r)S(r) = 4\pi r^2 E. \tag{34}$$

Considérant tout d´abord le cas $r < R$. La charge totale à l´interieur de la sphère est nulle et le théorème de Gauss donne

$$4\pi r^2 E = 0. \tag{35}$$

d´où le champ électrique $E = 0$. Le champ électrique en tout point à l´interieur d´une sphère qui n´est chargée qu´en surface, est nul. Ceci est un résultat non trivial et intéréssant, en un point à l´interieur de la sphère, chaque fraction de charges ditribuées uniformément sur la surface de la sphère crée un champ électrique en ce point, mais la somme de tout les champs électriques produits par toutes les charges est nulle.

Considérant ensuite le cas $r > R$, nous trouvant que la charge inttérieure à la surface S est la charge totale Q de la sphère. En appliquant le théorème de Gauss on obtient

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}. \tag{36}$$

Et donc le champ électrique soit

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{37}$$

C´est exactement le résultat donnant le champ électrique d´une charge ponctuelle. Donc le champ résultant et le même que si toute la charge était concentrée dans le centre.

On peut représenter graphiquement le module du champ électrique créé par une sphère chargée uniformément à la surface. Il est nul pour tout $r < R$ et il se change discontinuellement à une valeur maximale pour $r = R$ et ensuite il commence à décroitre en $1/r^2$.

Variation de E en fonction de r (surface chargée)

3.2.2. Champ électrique d´une sphère chargée en volume uniformément avec une densité ρ

Ce problème ressemble au précédent, on cosidère donc comme surface de Gauss la sphère de rayon r. Pour $r > R$ on retrouve le résultat

$$E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{38}$$

où Q est la charge totale de la sphère pleine.

Par contre, lorsque $r < R$ la charge se trouvant à l´intérieur de la sphère de Gauss de rayon r est

$$Q' = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{4/3\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3. \tag{39}$$

En appliquant le théorème de Gauss on obtient

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3}, \tag{40}$$

d´où on obtient pour le champ électrique intérieur

$$E_{int} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r. \tag{41}$$

Le champ électrique intérieur en un point est directement proportionnel à la distance du point au centre de la sphère.

On peut à la fin représenter le module du champ électrique E créé par un volume sphérique chargé uniformément dans un graphe en fonction de la distance r. Dans le centre $E = 0$ et il commence à croitre linéairement jusqu´à atteindre la valeur maximale $E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ qui correspond à la valeur du champ sur la surface de la sphère. A partir de cette valeur le champ électrique extérieur diminue en $1/r^2$ jusqu´à 0 lorsque $r \rightarrow \infty$.

Variation de E en fonction de r (volume chargée)

3.2.3. Champ électrique créé par un plan infni chargé uniformément

Plan infini chargé uniformément.