Ch.1 Rappels Mathématiques: Analyse dimensionnelle

CUAT-IST 18.10.2010 K.Demmouche (cours 1 Phys1) suite 2

1 Introduction

La première étape pour étudier un phénomène physique est l´identification des variables importantes. La relation mathématique entre ces variables constitue une *loi de la physique.* Pour quelques phénomène simple, ceci est possible. On peut construire une relation quantitative à partir du *premier principe* (une théorie).

Par contre pour des système complexe ceci peut être difficile. Dans ce cas une méthode de modélisation telle que l´**analyse dimensionnelle** est indispensable.

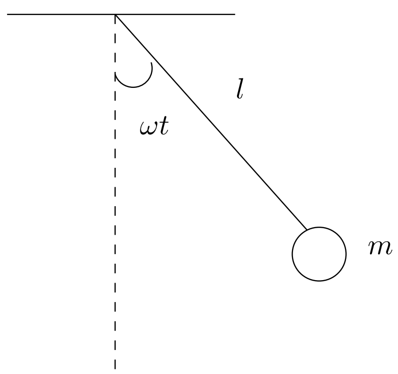
On ait déjà familiarisé avec l´analyse dimensionnelle lorsque on veut vérifier les unités pour s´assurer que la partie gauche et droite d´une équation ont la même unité.

$$x = vt \Longleftrightarrow \text{ en unité } (m) = \left(\frac{m}{s}\right) \times s = m. \tag{1}$$

Ceci est l´exemple trivial de l´utilité de l´analyse dimensionnelle. On veut par contre l´utiliser ici pour résoudre des problèmes.

L´iddée de base: Les lois de la physique ne dpendent pas de l´arbitraire dans le choix des unités de mesure de base.

Autrement dit: la loi de Newton $F = ma$ est vraie si on choisi "kg" pour m, "m/s^2" pour a et "N" pour F, ou bien si on choisi pour m le "lingot" (*slug* chez les anglo-saxons) , "pied/sec^2" pour a et le "livre" pour F.



Considérons par exemple la pulsation ω de petites oscillations d´un pendule simple, de longueur l et de masse m. ω est une vitesse angulaire (angle parcours pendant un temps t). Le premier principe donne

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{2}$$

où g est l´accélération de la pesanteur (9.8 m/s^2).

Cette équation est obtenue en solvant une équation différentielle qui résulte de l´application de la 2ème loi de Newton pour le pendule.

Esssayons de déduire maintenant cette équation à partir d´une analyse dimensionnelle seulement. Dans ce système il est clair que les *variables importantes* sont

$$m \ , \ l \ , \ g \tag{3}$$

On attribue à chaque grandeur une *unité*, donc

$$m \rightarrow M \text{ masse} \tag{4}$$

$$l \rightarrow L \text{ longueur} \tag{5}$$

$$g \rightarrow LT^{-2} \tag{6}$$

$$\omega \rightarrow T^{-1}. \tag{7}$$

On remarque ici que le rapport

$$\frac{g}{l} \rightarrow T^{-2}, \tag{8}$$

et par conséquent

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow T^{-1}. \tag{9}$$

Ainsi le rapport

$$r = \frac{\omega}{\sqrt{g/l}} \tag{10}$$

est invariant (sans dimension !). Cela veut dire

$$\omega = const\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{11}$$

Remarques:

- 1- La pulsation ne dépend pas de la masse m.
- 2- La constante ne peut être déterminée par des considérations de l´analyse dimensionnelle. Ceci nécéssite une *théorie*.
-

Conclusion:

L´analyse dimensionnelle permet de déduier les relations possibles entre les variables imporatantes d´un système physique en étudiant seulement les dimensions de ces variables.

2 L´unité (les unités de mesure)

Si on veut mesurer une longueur x d´une table par exemple, on fixe tout d´abord une longueur de référence (unité) u et on cherche combient de fois de u est la longueur de la table. Supposons que cette dernière fait trois fois notre référence, on écrit

$$x = 3 \text{ u}. \tag{12}$$

Durant ce cours on va adopter le système internatinel (SI) des unités. Dans ce système les unités de base sont:

m (mètre), kg (kilogramme), s (seconde), A (ampère) qui sont souvent utilisées. Le système SI est résumé dans le tableau (**??**). Toutes autres unités sont *dérivées* des système de base:

N (Newton), J (joule), Ω (Ohm), ...

Exemple: J=kgm^2/s^2.

La dimension de quelques quantités en physique sont résumées dans le tableau (**??**).

Unités secondaires: l (litre), ¡C, cal, ...

On note la dimension d´une quantité φ par

$$[\varphi]. \tag{13}$$

Si $[\varphi] = 1$ la valeur numérique de φ est la même dans tout système d´unités.

Exemple:

$$[F] = [ma] = [m][a] = MLT^{-2}. \tag{14}$$

De cette manière on peut déduire les dimensions de toutes les quantités en physique (voir par exemple tableau (**??**)).

Quantité	nom dans SI	Symbole dans SI	Dimension
Longueur	mètre	m	L
Temps	seconde	s	T
Masse	kilogramme	kg	M
Température	Kelvin	K	θ
Courant	Ampère	A	I
Quantité de la matière	mole	mol	N
Intensité lumineuse	Candela	cd	J

Table 1: Les unités du système SI

Symbole	quantité	dimension
v	vitesse	LT^{-1}
a	accélération	LT^{-2}
F	force	MLT^{-2}
ρ	densité	ML^{-3}
p	préssion	$ML^{-1}T^{-2}$
α	angle	1
E	energie	ML^2T^{-2}
Q	charge électrique	IT

Table 2: Dimension de quelques quantités en physique.

On remarque que les dimensions dans le tableau (**??**) sont puissances monomiales de LMT [1]

$$[\varphi] = CM^{\alpha}L^{\beta}T^{\gamma}, \tag{15}$$

où C, α, β, γ sont des constantes. Cette équation est appelée **équations aux dimensions** (ou bien aussi “homogénité dimensionnelle”).

Exemple: Peundule simple.

ω est une fonction des variables: g, l, m

$$\omega = f(g, l, m) = Cm^{\alpha}l^{\beta}g^{\gamma}. \tag{16}$$

On a

$$\begin{aligned} [g] &= LT^{-2} && (17)\\ [l] &= L && (18)\\ [m] &= M && (19)\\ [\omega] &= T^{-1}. && (20) \end{aligned}$$

L´équation aux dimensions s´écrit

$$[\omega] = [m]^{\alpha}[l]^{\beta}[g]^{\gamma}. \tag{21}$$

On remplace

$$\begin{aligned} T^{-1} &= M^{\alpha}L^{\beta}L^{\gamma}T^{-2\gamma} && (22)\\ T^{-1} &= M^{\alpha}L^{\beta+\gamma}T^{-2\gamma}. && (23) \end{aligned}$$

En identifiant les deux parts de l´équation on obtient

$$\begin{aligned} -1 &= -2\gamma && (24)\\ 0 &= \alpha && (25)\\ 0 &= \beta+\gamma. && (26) \end{aligned}$$

[1] On se limite ici aux grandeurs de la classe MLT.

Le résultat final est

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 && (27)\\ \beta &= -\frac{1}{2} && (28)\\ \gamma &= \frac{1}{2}. && (29) \end{aligned}$$

Enfin en remplaçant dans (**??**) la vitesse angulaire s´écrit

$$\omega = C\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{30}$$

Exemple 1: Oscillation d´une étoile

La pulsation d´oscillation est ω ($[\omega] = T^{-1}$). On commence par l´identification les variables importantes *indépendantes*. Les quantités qui peuvent intervenir dans ce système sont:

$$\begin{aligned} \rho &: \; densit(ML^{-3}) && (31)\\ R &: \; rayon(L) && (32)\\ G &: \; Constante\ de\ la\ gravitation(M^{-1}L^{3}T^{-2}). && (33) \end{aligned}$$

On peut ajouter la masse m, mais cette quantité est déjà prédéfinie dans la densité, et donc pas indépendante $m = \rho V = \rho(\frac{4}{3}\pi R^3)$.

La pulsation s´écrit

$$\omega = C\rho^{\alpha}R^{\beta}G^{\gamma}. \tag{34}$$

L´équation aux dimensions est

$$[\omega] = [\rho]^{\alpha}[R]^{\beta}[G]^{\gamma}. \tag{35}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma = \frac{1}{2}, && (36)\\ \beta &= 0. && (37) \end{aligned}$$

On obtient enfin pour la pulsation

$$\omega = C\sqrt{G\rho}. \tag{38}$$

On remarque que la pulsation est indépendante du rayon de l´étoile R.

Exemple 2: Energie dans une explosion nucléaire

Le dégagement de l´energie dans une région spaciale petite crée une onde de choc sphérique. La préssion à l´intérieur est des miliers de fois plus grande que la préssion atmosphérique. on veut chercher comment le rayon R de ce choc augmente en fonction du temps t.

Les variables importantes qui peuvent intervenir dans ce système sont

$$Energie: \quad [E] = \quad ML^2T^{-2} \tag{39}$$
$$Temps: \quad [t] = \quad T \tag{40}$$
$$Densiteinitiale: \quad [\rho_0] = \quad ML^{-3}, \tag{41}$$

et sachant que

$$[R] = L. \tag{42}$$

Donc le rayon s´écrit

$$R = CE^{\alpha}\rho_0^{\beta}t^{\gamma}. \tag{43}$$

On trouve

$$R = CE^{1/5}\rho_0^{-1/5}t^{2/5}. \tag{44}$$