Chapitre I

Rappels Mathématiques

I. Généralités sur les grandeurs physiques

On distingue deux types de grandeurs

- grandeurs physiques repérables
- grandeurs physiques mesurables

a. Grandeurs physiques repérables

Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.

Exemple :

Dureté

Viscosité

Rigidité diélectrique

Etc……

b. Grandeurs physiques mesurables

Une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèces, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique. Le nombre qui mesure cette grandeur est le rapport de cette grandeur à la grandeur de même espèce choisie comme unité.

Il existe deux types de grandeurs mesurables : Scalaires et Vectorielles.

Exemple de grandeurs scalaires :

- Longueur
- Masse
- Temps
- Etc….

Exemple de grandeurs vectorielles

- Vitesse
- Accélération
- Etc…

II. Systèmes d'unités en physique

II. 1. Unités de base du système international

Le système international (S.I.) est constitué par les unités du système MKSA rationalisé (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère) et comporte des définitions supplémentaires de l'unité de température et de l'unité d'intensité lumineuse.

Dans ce système d'unité, les unités de base ou fondamentales se définissent de la façon suivante :

- *Longueur* : l'unité de base SI de longueur est le mètre (m). Le mètre est la longueur égale à 1650 763,73 Longueur d'onde, dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p^{10}$ et $5d^{5}$ de l'atome de Krypton 86.

- *Masse* : l'unité de base SI de masse est le Kilogramme(Kg). Le Kilogramme est la masse du prototype en platine, qui a été sanctionné par la conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1889, et qui déposé au BIPM (Bureau International des Poids et Mesures : il est hébergé au Pavillon de Breteuil à Sèvres, dans le Parc de Saint-Cloud près de Paris).

-*Temps* : l'unité de base dans le S. I. de temps est la seconde (s). La seconde est définie comme étant la fraction 1/31 556 925, 9747 de l'année tropique de 1900.

- *Intensité du courant électrique* : l'unité de base dans le S. I. de l'intensité du courant électrique est l'Ampère (A).

L'ampère est défini comme étant l'intensité du courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1mètre l'un de l'autre, dans le vide, produit entre ces conducteurs, par mètre de longueur, une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ Newton.

-*Température thermodynamique* : l'unité de base dans le S. I. de la température thermodynamique est le Degré Kelvin (°K).

Le Degré Kelvin est défini comme étant le degré de l'échelle thermodynamique es températures absolues dans laquelle la température du point triple de l'eau est 273,16°C.

Point Triple

Le point triple est, en thermodynamique, un point du diagramme de phase qui correspond à la coexistence de trois états (liquide, solide et gazeux) d'un corps pur. Il est unique et s'observe seulement à une température et une pression données.

Exemple :

- Le point triple de l'eau est à :
T = 273,16 K (soit 0,01 °C)
et P = 611 Pa (soit 0,006 atm)
- Le point triple de l'azote est à :
T = 63,16 K et P = 12 868 Pa
- Le point triple du dioxyde de carbone est à:
T = 216,55 K et $P = 519.10^3$ Pa
(soit 5,12 atm)
- Le point triple du néon est à :
T = 24,5561 K et $P = 4{,}34 \cdot 10^{-6}$ Pa

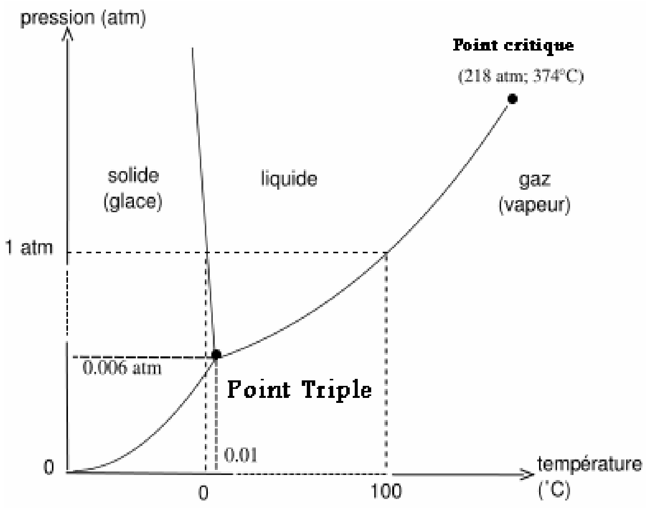


Diagramme de phase de l'eau

- *Intensité lumineuse* : l'unité de base dans le S. I. de l'intensité lumineuse est le Candela (Cd). Le Candela est définie comme étant l'intensité lumineuse, dans une direction déterminée, d'une ouverture perpendiculaire à cette direction, ayant une aire de 1/60 de centimètre carré et rayonnant comme un radiateur intégral (Corps Noir) à la température de solidification du platine.

Remarque : Il existe aussi d'autres systèmes d'unités en physique, comme par exemple :

- Le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde) ;
- Le système MTS (Mètre, Tonne, Seconde).

II.2. Unités dérivées du Système International

A partir des unités de base auparavant définies, on peut définir facilement des unités qui en découlent,

- *Surface* : mètre carré (m^2)

Aire d'un carré de 1mètre de coté

-*Volume* : mètre cube (m^3)

Volume d'un cube de 1mètre de coté

- *Angle plan* : radian (rd ou rad)

Angle plan, ayant son sommet au centre d'un cercle, interceptant, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon.

- *Angle solide* : stéradian (sr)

Angle solide, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpant sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

-*Vitesse* : mètre par seconde (m/s)

Vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt en 1 seconde, une distance de 1mètre.

-*Accélération* : mètre par seconde, par seconde (m/s^2)

- *Vitesse Angulaire* : radian par seconde (rd/s)

- *Force* : Newton (N)

Force qui communique à un corps, ayant une masse de 1 Kg, une accélération de 1mètre par seconde

- *Moment* : Mètre.Newton (m.N)

Moment par rapport à un axe, d'une force de 1 Newton dont le support est distant de 1 mètre de l'axe et y est orthogonal.

- *Energie, Travail, Quantité de Chaleur* : Joule (J)

Travail produit par une force de 1 Newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

- *Puissance* : Watt (W)

Puissance de 1 Joule par seconde (Travail/ Temps).

- *Contrainte, Pression* : Pascal (Pa)

Pression uniforme qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce perpendiculairement à cette surface, une force totale de 1 Newton.

III. Equations aux Dimensions

III. 1. Définition :

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T.

Ainsi une vitesse qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par

$$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

- une accélération : $\Gamma = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$
- une force : $F = M.\Gamma = MLT^{-2}$
- un travail : $W = F.L = ML^2T^{-2}$
- une puissance : $P = \frac{W}{T} = ML^2T^{-3}$
- une quantité de chaleur : $Q = ML^2T^{-3}$ (comme un travail)
- une pression, une contrainte : $p = \frac{F}{S} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$
- un moment d'inertie : M$= ML^2$

III. 2. Utilités des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions servent à vérifier l'homogénéité des formules :

Ainsi : $\frac{1}{2}mv^2$ est homogène à une énergie (c'est-à-dire un travail), l'équation aux dimensions d'un travail est $W = ML^2T^{-2}$

$\frac{1}{2}mv^2 \to M.\left(\frac{L}{T}\right)^2 = ML^2T^{-2}$ est bien une énergie.

III. 3. Relation entre les unités

Les relations entre les unités des différents systèmes peuvent être facilement établies en utilisant les équations aux dimensions.

Exemple :

Calculer la relation existant entre le Barye (unité de pression dans le système CGS) et le pascal (unité de pression dans le S. I.)

Pression : $p = ML^{-1}T^{-2}$

$$\frac{1\,Pa}{1\,Barye} = \left(\frac{M}{M}\right).\left(\frac{L^{-1}}{L^{-1}}\right).\left(\frac{T^{-2}}{T^{-2}}\right) = \frac{1000}{1}.\frac{100^{-1}}{1^{-1}}.\frac{1}{1} = 10$$

$\Rightarrow 1\ Pa = 10\,Baryes$

IV. Calcul d'erreurs

IV. 1. Définitions :

Pour toute grandeur mesurable A, il est possible de définir :

- sa valeur mesurée a
- sa valeur exacte a_0 qu'on ne peut pas atteindre

Erreur Absolue : se définit alors par $\delta a = a - a_0$

Cette erreur est la résultante de plusieurs erreurs (systématiques, accédentelles…….)

Incertitude absolue :

L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on se contente de donner une limite supérieure Δa appelée incertitude absolue telle que :

$|\delta a| \leq \Delta a \Rightarrow \Delta a > 0$ (l'incertitude absolue est toujours >0)

Cela veut dire que l'incertitude absolue est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue.

Incertitude relative :

Elle est définie par le rapport $\dfrac{\Delta a}{a}$

IV. 2. Calculs d'erreurs

Soit une grandeur g=f(x, y, z), sa différentielle totale s'écrit :

$$dg = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

L'incertitude absolue sur la variable g s'obtient en passant aux variations des variables qui la compose, soit :

$$\Delta g = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

Exemple1 :

Soit à déterminer l'incertitude relative $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ de la masse volumique de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse « m » et de son arête « a ».

Solution :

Si m et a désignent les valeurs approchées de la masse et de l'arête du cube, on peut écrire :

$$\rho = \frac{masse}{volume} = \frac{m}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = m\,a^{-3}$$

Dérivant le volume par rapport à la masse et à l'arête. Ce qui donne :

$$d\rho = a^{-3}\,dm - 3a^{-4}m\,da$$

En approximant les petites variations « d » par de grandes variations « Δ », il vient :

$$\Delta\rho = a^{-3}\,\Delta m + 3a^{-4}m\,\Delta a \Rightarrow \Delta\rho = \frac{1}{a^3}\Delta m + 3\frac{m}{a^4}\Delta a$$

d'où $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{m}{a^4}\Delta a$

Remarque :

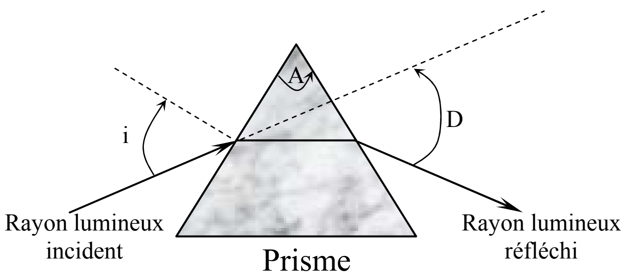
On retrouve la même chose en prenant Ln(ρ) et en différentiant la nouvelle équation.

Ln : est la fonction népérienne.

Exemple 02 :

Soit à déterminer l'incertitude sur l'indice de réfraction d'un prisme donné par la relation suivante :

$$n = \frac{\sin[(D+A)/2]}{\sin(A/2)}$$



Solution :

$$dn = \frac{\sin(\frac{A}{2})\left\{\frac{1}{2}\cos(\frac{D+A}{2})dD + \frac{1}{2}\cos(\frac{D+A}{2})dA\right\} - \frac{1}{2}os(\frac{A}{2})\,dA\,\sin(\frac{D+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^2}$$

$$=\frac{\frac{dA}{2}\left\{\sin(\frac{A}{2})\cos(\frac{D+A}{2})-\cos(\frac{A}{2})\sin(\frac{D+A}{2})\right\}+\sin(\frac{A}{2})\ \cos(\frac{D+A}{2})\frac{dD}{2}}{\sin(\frac{A}{2})^{2}}$$

$$=\frac{\frac{dA}{2}\sin(\frac{A}{2}-\frac{D+A}{2})+\sin(\frac{A}{2})\ \cos(\frac{D+A}{2})\frac{dD}{2}}{\sin(\frac{A}{2})^{2}}$$

$$=\frac{-\sin(\frac{D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^{2}}\ \frac{dA}{2}+\frac{\cos(\frac{D+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}\ \frac{dD}{2}$$

Il vient :

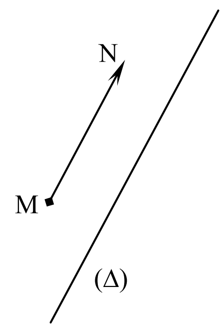
$$\Delta n=\frac{\sin(\frac{D}{2})}{\sin(\frac{A}{2})^{2}}\ \frac{\Delta A}{2}+\frac{\cos(\frac{D+A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})}\ \frac{\Delta D}{2}$$

V. Vecteurs

V. 1. Définitions

Un vecteur est segment de droite MN, ayant une origine M et une extrémité N. Il est complètement défini si l'on se donne :

- son origine ou point d'application.
- sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- Son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de M vers N.
- Sa grandeur qui la longueur MN (ou module).

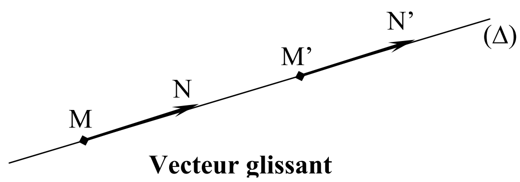


Vecteur libre

On le note symboliquement par $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{a}$, etc….

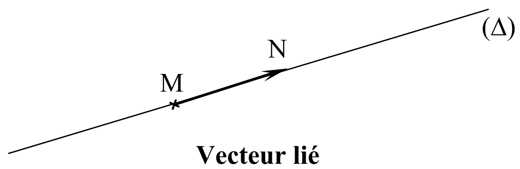
<u>Remarque :</u>

Si l'on se donne simplement la direction, le sens et le module, on dit que l'on a défini un <u>vecteur libre</u>.



Vecteur glissant

Si en plus, on se donne la droite (Δ) qui porte le vecteur, on dit que l'on a défini un <u>vecteur glissant</u>.



Vecteur lié

Si en plus de la droite qui porte le vecteur, on se donne encore le point d'application M, on définit un vecteur lié.

Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteurs glissant.

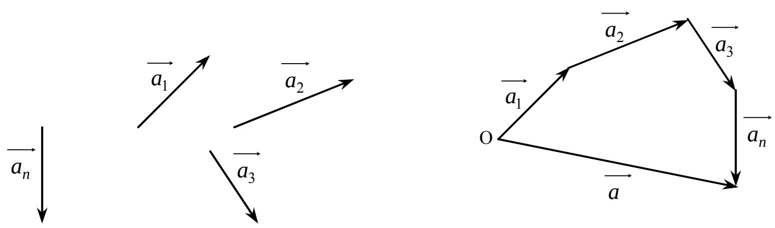
Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

V. 2. Opérations sur les vecteurs libres

V. 2. 1. Addition

Par définition, la somme d'un certains nombre de vecteurs libres $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$ est un vecteur libre $\overrightarrow{a}$, dont on obtient la représentation en construisant un contour polygonal d'origine quelconque et dont les côtés sont respectivement égaux aux vecteurs $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, ..., \overrightarrow{a_n}$. On écrit : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + ... + \overrightarrow{a_n}$.

Exemple



On démontre facilement, par des considérations de géométrie élémentaire, que cette somme n'est pas modifiée lorsqu'on intervertit l'ordre des vecteurs, ou qu'on remplace plusieurs d'entre eux par leur somme.

La somme des vecteurs est donc commutative est associative.

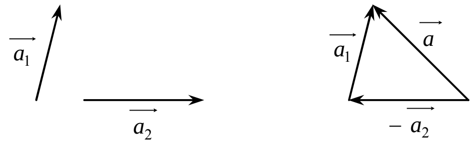
D'autre part, la somme de deux vecteurs opposés est nulle. Ce qui veut dire :

$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = 0$

La différence de deux vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2}$ est la somme du premier vecteur est l'opposé du second : $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} + (-\overrightarrow{a_2})$

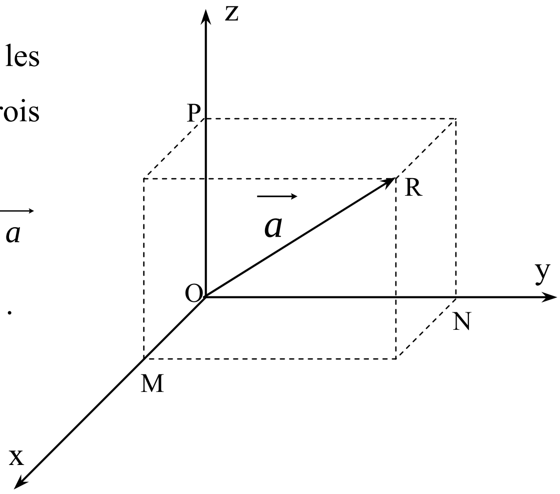
Exemple :

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_1} + (-\overrightarrow{a_2})$



V. 2. 2. Composantes d'un vecteur

Les trois projections OM, ON, OP d'un vecteur $\vec{a}$ sur les trois axes de coordonnées Oxyz peuvent être considérées comme trois vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ portés respectivement par ces trois axes, dont le sens et les grandeurs sont définis par les trois nombres algébriques X, Y et Z.



On montre facilement que le vecteur $\vec{a}$ est la somme des trois vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$.

$$\vec{a} = \vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z}$$

Les trois vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ s'appellent les 3 composantes du vecteur $\vec{a}$.

Si l'on considère divers vecteurs $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ de composantes $(\vec{X_1}, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$, $(\vec{X_2}, \vec{Y_2}, \vec{Z_2})$ et $(\vec{X_3}, \vec{Y_3}, \vec{Z_3})$, les théorèmes généraux de l'addition permettent d'écrire leur somme sous la forme :

$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} = \vec{X_1} + \vec{Y_1} + \vec{Z_1} + \vec{X_2} + \vec{Y_2} + \vec{Z_2} + \vec{X_3} + \vec{Y_3} + \vec{Z_3}$$
$$= (\vec{X_1} + \vec{X_2} + \vec{X_3}) + (\vec{Y_1} + \vec{Y_2} + \vec{Y_3}) + (\vec{Z_1} + \vec{Z_2} + \vec{Z_3})$$

Ainsi, l'égalité vectorielle $\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3}$ est équivalente aux trois égalités algébriques :

$X = X_1 + X_2 + X_3$

$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$

$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$

V. 2. 3. Multiplication d'un vecteur par une quantité scalaire

La somme de n vecteurs, tous égaux à un même vecteur $\vec{a}$, est évidemment un vecteur $\vec{b}$ ayant même direction et même sens que le vecteur $\vec{a}$ et dont la grandeur b est égale à n fois la grandeur a du vecteur $\vec{a}$.

$$\vec{b} = n\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} \text{ ....} + \vec{a} \ (n \ \ fois)$$

De même le rapport $\overrightarrow{b} \,/\, \overrightarrow{a}$ de deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{a}$ est un nombre algébrique m, dont la valeur absolue est le rapport b/a des grandeurs des deux vecteurs, et qui est positif si les deux vecteurs sont de même sens, négatif si les deux vecteurs sont de sens contraire.

Remarque

Les trois composantes $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}$ d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ peuvent être considérées comme les produits par les trois nombre algébriques X, Y, Z coordonnées de e vecteur, de vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ de grandeurs égales à l'unité, respectivement dirigés suivant les trois axes Ox, Oy, Oz dans le sens positif de ces axes. $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sont appelés vecteurs unitaires des axes.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{a}$ de coordonnées X, Y , Z s'écrira

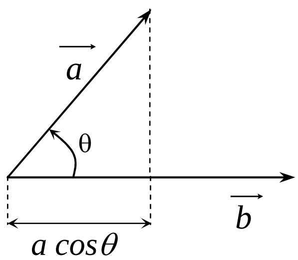
$$\overrightarrow{a} = X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} + Z\,\overrightarrow{k}$$

V. 2. 4. Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, faisant entre eux l'angle θ, et on représente par la notation

$$m = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \qquad \text{(scalaire)}$$

la quantité $\quad m = a \cdot b \cdot \cos\theta = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\theta$



D'après la définition, il s'avère que le produit scalaire est commutatif c'est-à-dire $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

On conçoit facilement d'après la définition que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}^{\,2} = a^2$.

On peut étendre au produit scalaire les diverses règles du calcul algébrique :

$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}) = \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b_2}$

De même en désignant par X, Y, Z et X', Y', Z' les coordonnées de deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{a'}$ par rapport aux trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a'} &= (X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} + Z\,\overrightarrow{k}) \cdot (X'\,\overrightarrow{i} + Y'\,\overrightarrow{j} + Z'\,\overrightarrow{k}) \\
&= XX'\,\overrightarrow{i}^2 + XY'\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{j} + XZ'\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k} + YX'\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{i} + YY'\,\overrightarrow{j}^2 \\
&\quad + YZ'\,\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{k} + ZX'\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{i} + ZY'\,\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{j} + ZZ'\,\overrightarrow{k}^2
\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{j}^2 = \overrightarrow{k}^2$ et $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} = 0$

Il s'ensuit donc : $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a'} = XX' + YY' + ZZ'$

De la même façon : $\overrightarrow{a}^2 = a^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$

Les quantités $X^2 + Y^2 + Z^2$ et $XX' + YY' + ZZ'$ représentent des grandeurs scalaires définies indépendamment des axes Oxyz, elles ne dépendent pas du choix de axes, et constituent donc ce qu'on appelle des invariants.

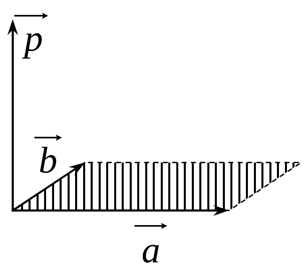
V. 2. 5. Produit vectoriel

On appelle produit vectoriel d'un vecteur libre $\overrightarrow{a}$ par un vecteur libre $\overrightarrow{b}$ et qu'on note par : $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$

un vecteur libre $\overrightarrow{p}$, perpendiculaire au plan des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, de sens tel que le trièdre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{p}$ soit direct et dont la grandeur est donné par :

$$p = a \cdot b \cdot \sin\theta$$

Le module de $\overrightarrow{p}$ correspond donc à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.



Il résulte de la définition que le produit vectoriel n'est pas indépendant de l'ordre des deux facteurs :

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{b} \wedge \vec{a}$ sont deux vecteurs opposée.

On peut appliquer au produit vectoriel les règles ordinaires du calcul algébrique à condition de ne jamais intervertir l'ordre des facteurs.

<u>Exemple</u> :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b_1} + \vec{b_2}) = \vec{a} \wedge \vec{b_1} + \vec{a} \wedge \vec{b_2}$$

Exprimons en particulier le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{a'}$ de coordonnées X, Y, Z et X', Y' et Z'

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{a'} &= (X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}) \wedge (X'\,\vec{i} + Y'\,\vec{j} + Z'\,\vec{k}) \\ &= XX'\,\vec{i} \wedge \vec{i} + XY'\,\vec{i} \wedge \vec{j} + XZ'\,\vec{i} \wedge \vec{k} + YX'\,\vec{j} \wedge \vec{i} + YY'\,\vec{j} \wedge \vec{j} \\ &\quad + YZ'\,\vec{j} \wedge \vec{k} + ZX'\,\vec{k} \wedge \vec{i} + ZY'\,\vec{k} \wedge \vec{j} + ZZ'\,\vec{k} \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

Or $\quad \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$

et $\quad \begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = -(\vec{j} \wedge \vec{i}) = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = -(\vec{k} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = -(\vec{i} \wedge \vec{k}) = \vec{j} \end{cases}$

Il s'ensuit :

$$\vec{a} \wedge \vec{a'} = (YZ' - ZY')\,\vec{i} + (ZX' - XZ')\,\vec{j} + (XY' - YX')\,\vec{k}$$

Disposition pratique du calcul

$$\vec{a} \wedge \vec{a'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = (YZ' - ZY')\,\vec{i} - (XZ' - ZX')\,\vec{j} + (XY' - YX')\,\vec{k}$$

V. 2. 6. Produit mixte

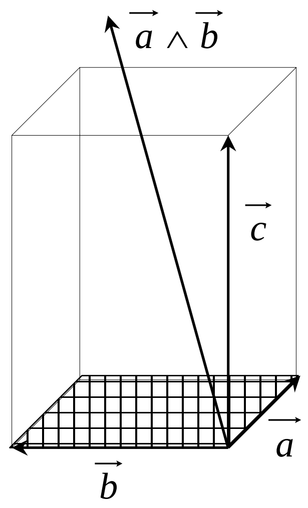
On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ une quantité scalaire m égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ce produit mixte donne le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Comme le volume du parallélépipède peut être évalué à partir d'un quelconque des faces, on a :

$$m = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$
$$= (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$
$$= (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$$



Comme le produit scalaire est commutatif, on peut écrire :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$$

On peut donc intervertir la multiplication scalaire et la multiplication vectorielle.

V.2.7. Dérivée d'un vecteur

V. 2. 7. 1. Définition

Soit une variable t, supposons qu'à chaque valeur de t on sache faire correspondre un certain vecteur $\vec{a}$, on dit que ce vecteur est fonction de t : a(t). Analytiquement, cela veut dire que l'on se donne trois fonctions X(t), Y(t), Z(t) de la variable t qui sont les coordonnées du vecteur $\vec{a}$.

Considérons deux vecteurs $\vec{a}(t)$ et $\vec{a}(t + \Delta t)$ de la variable t ; il leur correspond deux valeurs du vecteur $\vec{a}$, on peut former leur différence qui est un certain vecteur $\overrightarrow{\Delta a}$. Ce vecteur $\overrightarrow{\Delta a}$ tend généralement vers zéro en même temps que Δt, mais le vecteur $\frac{\overrightarrow{\Delta a}}{\Delta t}$ tend généralement vers une limite. Cette limite est un vecteur $\vec{a}\,'$ dérivée du vecteur $\vec{a}$; on écrit :

$$\vec{a}\,' = \frac{d\vec{a}}{dt}$$

On peut définir de la même façon $(\vec{a}\,')'$ qu'on appelle dérivée seconde du vecteur $\vec{a}$, et l'on écrit :

$$\vec{a}\,'' = \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$$

On voit immédiatement que les composantes de $\vec{a}\,'$ sont données par :

$$X' = \frac{dX}{dt}, \qquad Y' = \frac{dY}{dt}, \qquad Z' = \frac{dZ}{dt}$$

Il en est de même de la dérivée seconde du vecteur $\vec{a}$. Les composantes de $\vec{a}\,''$ sont données par :

$$X''=\frac{d^2X}{dt^2}, \qquad Y''=\frac{d^2Y}{dt^2}, \qquad Z''=\frac{d^2Z}{dt^2}$$

V. 2. 7. 2. Applications diverses

✓ Dérivée d'un produit scalaire :

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})'=\vec{a}\,'\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}\,'$$

Si $\vec{b}$ est constant $(\vec{a}\cdot\vec{b})'=\vec{a}\,'\cdot\vec{b}$ $\quad$ $car\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}\,'=0$

✓ Si $\vec{a}$ est un vecteur de module constant a, son carré $\vec{a}^{\,2}=a^2=const$, sa dérivée qui est donnée par $\left(\vec{a}^{\,2}\right)'=2\,\vec{a}\,\vec{a}\,'=0$.

Le vecteur dérivée $\vec{a}\,'$ est donc toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$.

✓ On peut toujours définir un vecteur par $\vec{a}=a\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire. Sa dérivée s'obtient par :

$$\vec{a}\,'=a'\,\vec{u}+a\,\vec{u}\,'$$

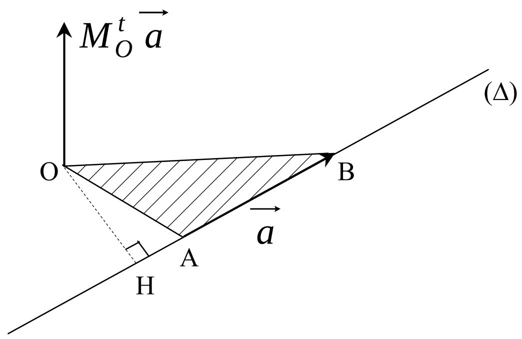
On voit donc que la dérivée de $\vec{a}$ est la somme de deux vecteurs dont le premier $a'\,\vec{u}$ est parallèle au vecteur $\vec{a}$, le second $a\,u'$ lui est perpendiculaire.

V. 2. 8. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Considérons un vecteur lié $\vec{a}$ d'origine A d'extrémité B porté par une droite (Δ) et un point (O).

On appelle moment du vecteur $\vec{a}$ par rapport au point O, un vecteur égal au produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{OA}$ par le vecteur $\vec{a}$:

$$\mathrm{M}_O^t\,\vec{a}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{a}$$



Son module est le double de l'aire du triangle OAB, son module est donc égal au produit de la grandeur a=AB par la distance OH du point O à la droite (Δ). On voit que sa grandeur, sa direction et son sens sont indépendants de la position de AB sur la droite (Δ). La notion de moment est donc relative à un vecteur glissant.

On peut noter deux théorèmes relatifs au calcul des moments :

1. le moment d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ par rapport à un point (O') est égal à la somme de son moment par rapport au point (O) et du moment par rapport à (O'), d'un vecteur égal d'origine (O) :

$$\mathrm{M}^{t}_{O'}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}\right) \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{a}$$

2. le moment de la somme de plusieurs vecteurs concourants est égale à la somme de leurs moments (Théorème de Varignon).

En désignant par A le point de concours des vecteurs glissants $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$,........

ce théorème traduit les égalités géométriques :

$$\mathrm{M}^{t}_{O}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + ...) = \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + ...) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{c} + ...$$
$$= \mathrm{M}^{t}_{O}\overrightarrow{a} + \mathrm{M}^{t}_{O}\overrightarrow{b} + \mathrm{M}^{t}_{O}\overrightarrow{c} + ...$$

VI. Terminologie (المصطلحات)

Grandeur physique mesurable……………………..مقدار فيزيائي قابل للقياس
Grandeur physique repérable………………………مقدار فيزيائي غير قابل للقياس
Egalité……………………………………….….التساوي
Rapport……………………………………….....حاصل قسمة
Espèce……………………………………….….فصيلة
Type…………………………………….....……نوع
Grandeur scalaire…………………………...…مقدار سلمي
Grandeur vectorielle…………………….………مقدار شعاعي
Longueur…………………………………..……طول
Masse………………………………….…………كتلة
Vitesse……………………………….……………سرعة
Accélération……………………………………….تسارع
Unité de mesure……………………………………وحدة القياس
Système international………………………………نظام دولي
Intensité du courant électrique……………………شدة التيار الكهربائي
Vitesse angulaire……………..………………………سرعة زاوية
Force………………………………………………قوة
Moment………………………………………………عزم
Energie……………………………………………طاقة
Puissance…..………………………………………استطاعة
Travail………………………………………………عمل
Quantité de chaleur……………………………….كمية حرارة
Pression……………………………………………ضغط
Horizontal………………………………………….أفقي
Normal,Perpendiculaire……………………………عمودي/متعامد
Définition…………………………...………………تعريف
Conventionnel…………………….………………اصطلاحي
Unité fondamentale……………………….………وحدة أساسية
Moment d'inertie……………………….………….عزم العطالة
Homogène…………………………………………متجانس
Erreurs……………………………………………..أخطاء
Incertitudes……………………………...…………ارتيابات
Absolu……………………………………..………مطلق
Relatif…………………………………….……….نسبي
Variable……………………………………….......متغير
Equation différentielle…………………….………معادلة تفاضلية
Vecteur..شعاع
Origine……………………………………………مبدأ
Direction………………………………………….حامل
Sens……………………………………….………اتجاه
Module………………………………………….معيار/طويلة
Opposé……………………………………………معاكس
Composantes……………………………………….إحداثيات
Coordonnées…………………………………....إحداثيات
Projections……………………………...……….إسقاطات
Produit scalaire……………………….………….جداء سلمي
Produit vectoriel………………………..………….جداء شعاعي
Derivée de vecteur……………………………….مشتقة شعاع
Axe……………………………………..…….محور

Chapitre II

Notions de Cinématique

I. Généralités

L'objet de la cinématique est l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui le produisent.

L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce corps par rapport à un repère pris comme référence (en général, un trièdre de référence ou référentiel). La notion de temps est aussi prise en considération.

En mécanique, dans l'étude des mouvements, on tient compte des forces qui les provoquent.

II. Cinématique du point

II. 1. Définitions

a. *Point matériel*

Un point matériel est défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à un point géométrique. En réalité, on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point au quel est supposé concentré toute la masse du corps.

b. Trajectoire

C'est le lieu des positions successives occupées par un point mobile. Celle–ci peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

c. Equation du mouvement (ou équation Horaire)

C'est la relation qui lie le chemin parcouru, au temps nécessaire à le parcourir.

d. Définition intrinsèque du mouvement

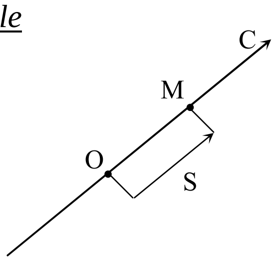
Le mouvement d'un point M est parfaitement défini si l'on connaît

- la trajectoire C
- la position, à chaque instant « t » du point M sur la trajectoire C. On fait le choix d'une origine et d'un sens positif (indiqué par une flèche).

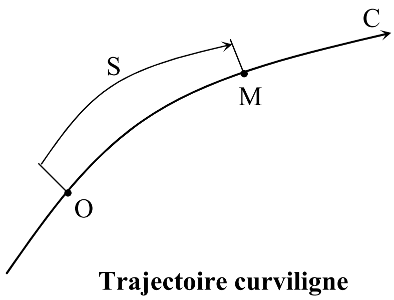
OM est défini par la fonction OM= S= f(t)

II. 2. Trajectoire ouverte

Exemple



Trajectoire rectiligne ouverte



Trajectoire curviligne ouverte

Une position de M est définie par son abscisse curviligne (S) par rapport à l'origine O. Valeur absolue de ce nombre S : longueur de l'arc OM.

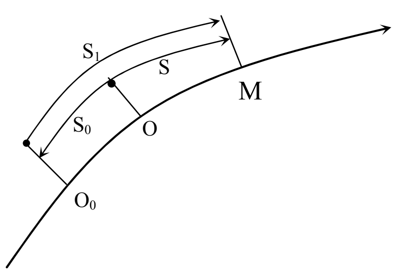
- Signe + si M se déplace dans le sens positif de la trajectoire
- Signe - si M se déplace dans le sens négatif de la trajectoire

A une abscisse curviligne S donnée, correspond un seul point M est réciproquement, à un point M donné, correspond une seule abscisse curviligne.

Changement d'origine

Si O_o est une seconde origine.

- S l'abscisse de M par rapport à O ;
- S_1 l'abscisse de M par rapport à O_o ;
- S_0 l'abscisse de O_o par rapport O.

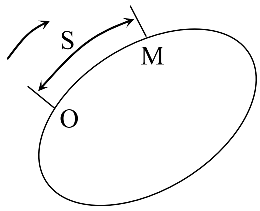


On a $S = S_o+S_1$

II. 3. Trajectoire fermée

A une abscisse curviligne S donnée, correspond un seul point M, mais la réciproque n'est plus vraie ici.

Trajectoire fermée



A un point donné M, correspond une infinité d'abscisses curvilignes qui sont données par la relation

$$s = S + kL$$

s : l'une des abscisses ;

S = OM (mesuré dans le sens positif)

L : longueur de la courbe

K : entier positif, négatif ou nul.

II. 4. Origine du temps, instant

a. <u>l'instant origine</u>

l'instant origine étant précisé en rapport avec une position définie du mobile dont on étudie le mouvement, les autres instants seront définis, par rapport à l'instant origine, par un nombre algébrique ayant pour :

- valeur absolue : la mesure de l'intervalle de temps qui sépare l'instant origine de l'instant considéré ;
- Le signe + : si l'instant considéré est postérieur à l'instant origine ;
- Le signe - : si l'instant considéré est antérieur à l'instant origine.

b. <u>Changement d'origine du temps</u>

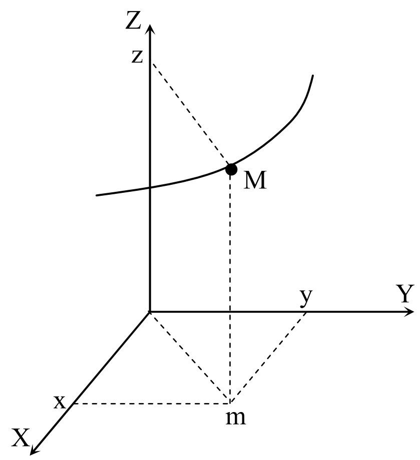
Si un même instant est défini, par rapport à deux origines de temps, par les nombres respectifs t et t_1 et si le nombre t_0 définit l'intervalle de temps qui sépare la deuxième origine de la première, on a :

$$t = t_0 + t_1$$

c. <u>Définition analytique du mouvement</u>

On choisit un repère Oxyz. La position d'un Point M (donc son mouvement) sera définie si l'on connaît, à chaque instant, ses coordonnées en fonction du temps, soit les trois équations :

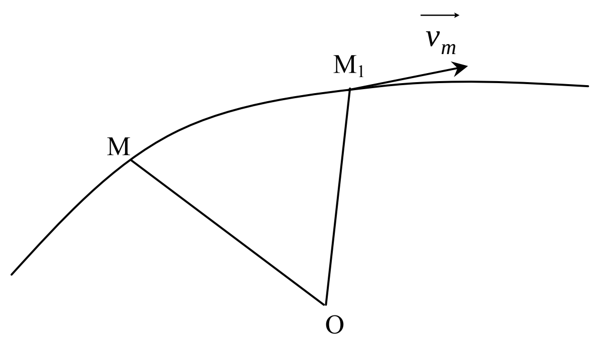
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$



III. Vitesse

Soit un mobile M, assimilé à un point, sur une trajectoire quelconque, au temps « t », il est dans la position M ; au temps « t_1 » il est dans la position M_1. On définit :

- la vitesse moyenne ;
- la vitesse instantanée.



III. 1. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne $\overrightarrow{v_{moy}}$ est la vitesse d'un point mobile qui irait de M à M_1 pendant le temps « Δt » d'un mouvement rectiligne et uniforme.

$$\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$$

III. 2. Vitesse instantanée ou vitesse à l'instant « t »

C'est la limite du rapport $\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t}$ lorsque $t_1 \to t$, c'est-à-dire lorsque $\Delta t \to 0$. On la note par $\overrightarrow{v(t)}$ ou simplement $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM}}{t_1 - t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

III. 3. Expression vectorielle (ou géométrique) de la vitesse

En introduisant l'abscisse curviligne s, on peut écrire

$s = OM = s(t)$

$s_1 = M_0 M_1 = s(t + dt)$

$\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau} = s'\,\vec{\tau}$ $\qquad \vec{\tau}$: Vecteur unitaire de la tangente en M

$\dfrac{ds}{dt} = s'$: vitesse algébrique instantanée

Remarque

Le vecteur vitesse est donc toujours orienté dans le sens du mouvement : sur une trajectoire orientée, si le mobile se déplace dans le sens positif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif. Si le mobile se déplace dans le sens négatif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens négatif.

III. 4. Expression du vecteur-vitesse (Composantes)

III. 4. 1. En coordonnées cartésiennes

La trajectoire du mobile M est définie par les coordonnées de la position en fonction du temps, c'est-à-dire par les coordonnées du vecteur position.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Le vecteur vitesse est défini par les coordonnées du vecteur dérivée de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{r}}{dt} = \begin{cases} x' = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y' = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ z' = \dfrac{dz(t)}{dt} \end{cases}$$

Le vecteur vitesse s'écrira alors :

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$

Son module sera donné par :

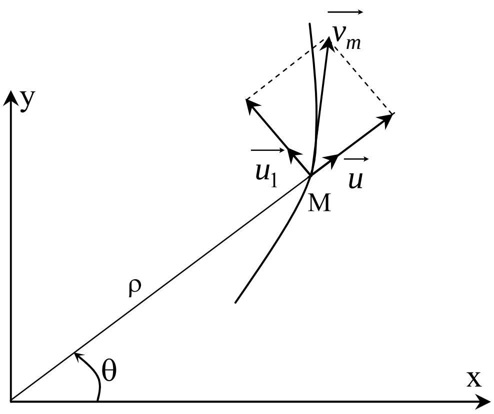
$$v_M = \left|\overrightarrow{v_M}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

III. 4. 1. En coordonnées polaires : Trajectoire dans le plan Oxy.

La trajectoire du mobile M est défini par $\begin{cases} \rho = OM = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$

Le vecteur vitesse est donné par :

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho\,\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u} + \rho\frac{d\,\overrightarrow{u}}{dt}$$



Or on sait que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u_1}$ sont perpendiculaires $\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_1}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v_M} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u} + \rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_1}$$

Ce qui signifie que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_M}$ est la somme géométrique de deux vecteurs :

- le premier $\left(\frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u}\right)$ radial
- le second $\left(\rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_1}\right)$ est perpendiculaire au premier

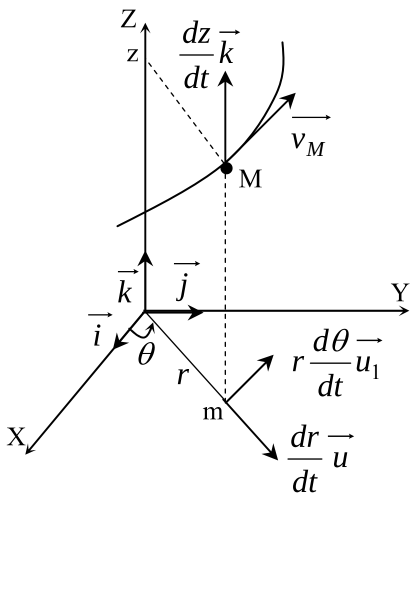
III. 4. 2. En coordonnées semi-polaires

La trajectoire du point M

est définie par $\begin{cases} r = OM = r(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Le vecteur vitesse est, par analogie au résultat précédent, sera donné par :

$$\overrightarrow{v_M} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u} + r\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_1} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k}$$



Il suffit d'ajouter la composante suivant Oz.

IV. Accélération

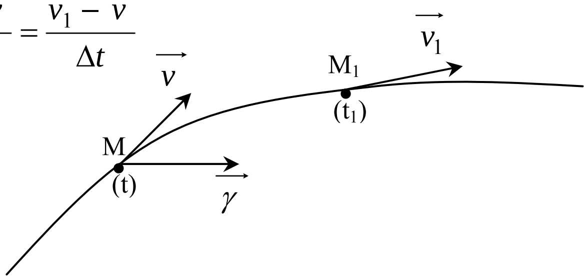
Soit $\overrightarrow{v}$ la vitesse d'un mobile à l'instant « t », et $\overrightarrow{v_1}$ sa vitesse à l'instant « t_1 ». On définit alors :

- L’accélération moyenne ;
- L’accélération instantanée.

IV. 1. Accélération moyenne

L’accélération moyenne entre les instants « t » et « t_1 » est par définition :

$$\overrightarrow{\gamma_{moy}} = \frac{\vec{v_1} - \vec{v}}{t_1 - t} = \frac{\vec{v_1} - \vec{v}}{\Delta t}$$



IV. 2. Accélération instantanée

C’est la limite du rapport précédent lorsque $t_1 \to t$, c'est-à-dire lorsque $\Delta t \to 0$.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

IV. 3. Expression du vecteur accélération

a. *Expression vectorielle*

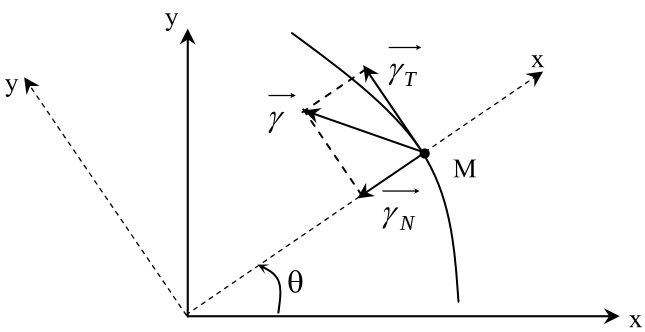
Elle est donnée par

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{r}\vec{n} = \overrightarrow{\gamma_t} + \overrightarrow{\gamma_n}$$

$\vec{\tau}$: vecteur unitaire de la tangente directe au point M, à la trajectoire orientée ;

$\vec{n}$: vecteur unitaire porté par la normale principale au point M et orienté vers le centre de la courbure ;

r : rayon de courbure de la trajectoire au point M à l’instant considéré.



On peut donc considérer $\overrightarrow{\gamma}$ comme étant la somme de deux vecteurs :

$$\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_t} \quad (\textit{accélération} \quad \tan \textit{gentielle}) \; + \; \overrightarrow{\gamma_n} \quad (\textit{accélération} \quad \textit{normale})$$

avec $\overrightarrow{\gamma_t} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ (dérivée seconde de l'abscisse « s » par rapport au temps)

$\gamma_n = \dfrac{v^2}{r}$, $v^2 > 0$ et $r > 0$ $\Rightarrow$ γ_n est toujours dirigée vers le centre de la courbure de la trajectoire).

Cas particuliers

✓ $\overrightarrow{\gamma_t} = 0$ cela veut dire que $\dfrac{dv}{dt} = 0$ (mouvement uniforme), reste la composante normale.

Pour que l'accélération $\overrightarrow{\gamma}$ se réduise à une accélération normale $\overrightarrow{\gamma_n}$, il faut et il suffit que le mouvement soit uniforme.

✓ $\overrightarrow{\gamma_n} = 0$ cela veut dire que :

soit $v = 0$ $\rightarrow$ point immobile

soit $r = \infty$ $\rightarrow$ trajectoire droite

Il reste dans ce cas la composante tangentielle seulement.

b. Expression analytique du vecteur accélération (composantes)

b. 1. *En coordonnées cartésiennes*

On sait que $\overrightarrow{v} : \begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} \\ y' = \dfrac{dy}{dt} \\ z' = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$ d'où $\overrightarrow{\gamma} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} : \begin{cases} x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ z'' = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$

Module de l'accélération :

$$\gamma = \left|\overrightarrow{\gamma}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

b. 2. *En coordonnées polaires*

Nous savons que la vitesse d'un mobile exprimée en coordonnées polaires est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u_1}$$

Cela veut dire que $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_1}$ et de la même façon $\frac{d\vec{u_1}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}$.

L'accélération $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ sera obtenue alors par

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u} + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u_1}\right) = \frac{d^2\rho}{dt}\vec{u} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u_1} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_1} + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{u_1}}{dt}$$

$$= \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u_1} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u_1} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_1} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}$$

$$= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u} + \left[2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\vec{u_1}$$

or $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}$

finalement $\vec{\gamma} = \left[\frac{d^{2\rho}}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{u_1}$

En coordonnées polaires (ρ : rayon polaire), les deux composantes de l'accélération sont donc :

$$\gamma_\rho = \frac{d^{2\rho}}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad suivant\ \vec{u}$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right) \quad suivzant\ \vec{u_1}$$

$$\vec{u} \perp \vec{u_1}$$

IV.4. Applications

Exercice 01

Un corps se déplace selon l'axe des x suivant la loi $x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$, x est en mètre et t en seconde. Trouver

1- sa vitesse et son accélération à chaque instant ;
2- sa position, sa vitesse et son accélération pour t=2 s et t=3s ;
3- sa vitesse et son accélération moyennes entre t=2 s et t=3 s.

Exercice 02

Un mobile en mouvement rectiligne a une accélération $\gamma = 1/t^2$. Sa vitesse initiale à l'instant $t_0 = 1s$ et au point $x = 1$ est nulle.

1- quelle est sa vitesse instantanée $v(t)$?

2- quelle est sa position instantanée $x(t)$?

Exercice 03

Monter que pour un mouvement rectiligne uniformément varié, on a :

$$v^2 - v_0^2 = 2\gamma_0 (x - x_0)$$

V. Cinématique du solide

Un corps solide est un corps dont les différents points demeurent à distances constantes les uns des autres.

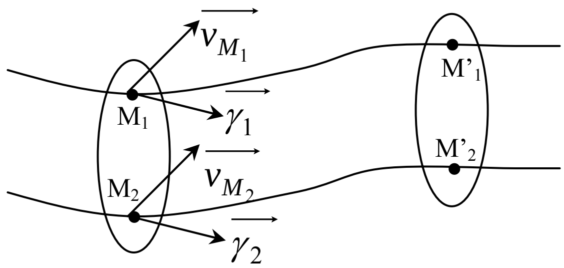
V. 1. Mouvement de translation

Définition : c'est un mouvement par rapport à un système de référence, tel que tout vecteur lié à deux points quelconque du corps, reste équipolle à lui même.

Propriétés du mouvement de translation

✓ *Trajectoires*

Les trajectoires des différents points d'un solide en mouvement de translation se déduisent les unes des autres par translation. Ce sont des courbes identiques, superposables.



✓ *Vitesse*

A chaque instant, les vecteurs vitesses de chacun des points d'un solide en mouvement de translation sont équipollents. La réciproque est vraie.

$\overrightarrow{v_{M_1}} = \overrightarrow{v_{M_2}}$ à un instant quelconque.

✓ *Accélération*

A chaque instant les vecteurs accélérations de chacun des points d'un solide en mouvement de translation sont équipollents. La réciproque est vraie.

$\overrightarrow{\gamma_1} = \overrightarrow{\gamma_2}$ à un instant quelconque.

Conséquence

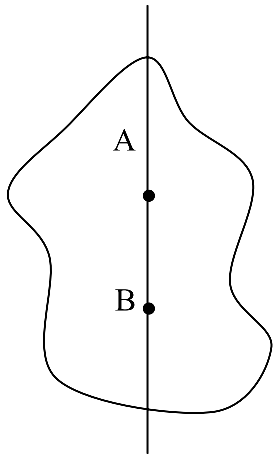
Le mouvement d'un corps solide en translation sera parfaitement défini par le mouvement de l'un de quelconques de ses points.

On appellera donc trajectoire, vitesse et accélération du mouvement du solide, la trajectoire, la vitesse et l'accélération de l'un de ses points.

V. 2. Mouvement de rotation

<u>*Définition*</u>

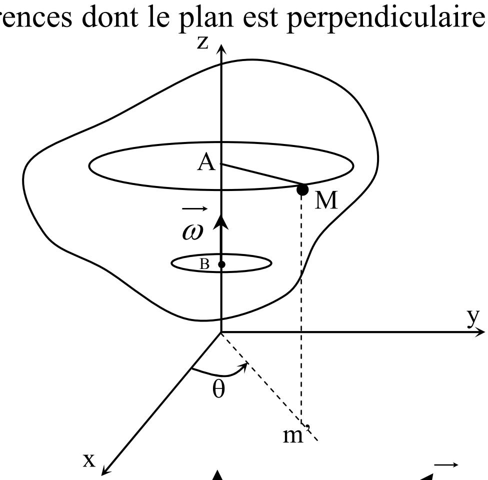
C'est un mouvement dans lequel deux points du solide restent fixes. Si A et B sont les deux points fixes, il en résulte que tous les points de la droite AB sont fixes; cette droite est l'axe de rotation. Oxyz est choisi tel que AB soit sur Oz.



<u>*Propriétés du mouvement de rotation*</u>

✓<u>*Trajectoire*</u>

Tous les points du solide décrivent des circonférences dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation.



✓<u>*Vitesse angulaire*</u>

A chaque instant, tous les points du solide ont la même vitesse angulaire, qui est la vitesse angulaire du solide : ω.

$\vec{\omega}$ est le vecteur rotation $\quad \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ ou $\omega = \theta'$

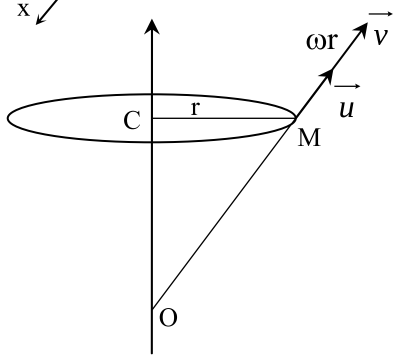
✓ <u>*Vitesse linéaire d'un point du solide*</u>

$$v = \omega \cdot r \qquad\qquad \vec{v} = \omega \cdot r \, \vec{u}$$

On peut montrer que :

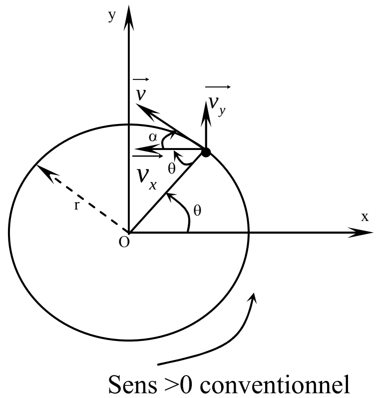
$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

(O point quelconque de l'axe de rotation)



✓ <u>*Composantes de la vitesse*</u>

$$\begin{cases} v_x = -\omega\, r \cos\alpha = -\omega\, r \sin\theta \\ v_y = \omega\, r \sin\alpha = \omega\, r \cos\theta \\ v_z = 0 \end{cases}$$



✓ <u>*Accélération*</u>

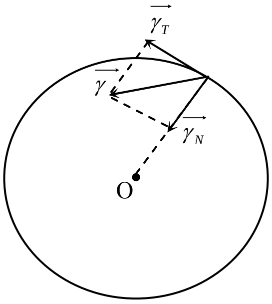
L'accélération sera celle d'un mouvement circulaire.

✓ *Accélération angulaire*

$$\theta'' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

✓ *Accélération d'un point*

$$\overrightarrow{\gamma_M} = \frac{d\,\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau} + \frac{v^2}{r}\overrightarrow{n}$$



Dans ce cas :

$$v = \omega \cdot r \qquad \text{et } r = \text{constante}$$

donc $\quad \overrightarrow{\gamma_M} = r\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{\tau} + \omega^2 r\,\overrightarrow{n}$

composantes de $\quad \overrightarrow{\gamma_M}\begin{cases} \overrightarrow{\gamma_T} = r\dfrac{d\omega}{dt}\overrightarrow{\tau} & \textit{suivant la tangente} \\ \overrightarrow{\gamma_N} = \omega^2 r\,\overrightarrow{n} & \textit{toujours dirigée vers le centre} \end{cases}$

V. 3. Mouvement hélicoïdal

✓*Définition*

C'est un mouvement dans lequel une droite (axe de mouvement) du solide reste fixe en pouvant glisser sur elle-même et un point du corps non situé sur l'axe de rotation décrit une hélice circulaire autour de cet axe.

✓*Trajectoire*

Chacun des points du solide décrit une hélice. Pour un point M quelconque, on a

$$z = a \cdot \theta + b$$

Pas de l'hélice : c'est la quantité $\quad p = 2\pi\, a$

p est le déplacement suivant l'axe Oz correspondant à $\theta = 2\pi$ soit un tour.

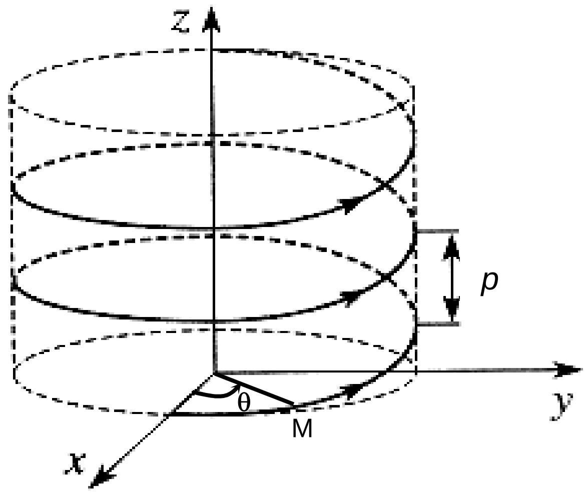
Remarque

Dans un mouvement hélicoïdal, tous les points du solide décrivent, simultanément autour de l'axe, des hélices circulaires de même pas (mais de rayon différent)

✓*Vitesse*

La vitesse de chacun des points est composée de deux vecteurs

$\overrightarrow{v_M}$ a pour composantes $\begin{cases} v_t = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\theta' \quad \textit{due à la rotation, située} \\ \qquad\qquad \textit{dans un plan } \perp Oz \\ v_t = \dfrac{dz}{dt} = z' \quad \textit{due au glissement suivant} \\ \qquad\qquad \textit{l' axe parrallèle à } Oz \end{cases}$



V.4. Applications

Exercice 01

Les coordonnées polaires d'un point en mouvement sont $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ et $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}) = \theta$, $\overrightarrow{u_r}$ étant le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OM}$.

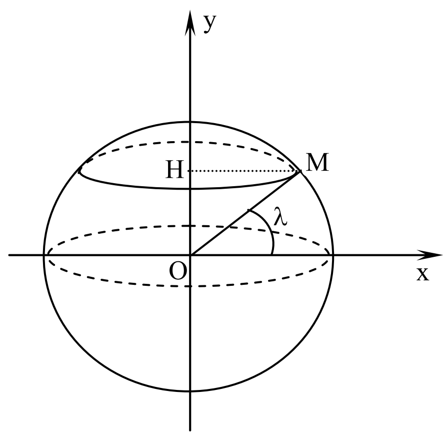
1. Quelles sont les composantes radiales et tangentielles de la vitesse $\vec{v}$?
2. Quelles sont les composantes radiales et tangentielles de l'accélération $\vec{\gamma}$?

Exercice 02

Une sphère de rayon R est mise en rotation à la vitesse angulaire constante ω, autour d'un axe (Δ) passant par son centre O.

1. Déterminer la vitesse linéaire v d'un point M situé sur la sphère à latitude λ (angle entre OM et le plan équatorial de la sphère) ;
2. En déduire le module de l'accélération γ du point M ;
3. Application numérique. Calculer v et γ dans le cas où le point M est un point situé sur la surface de la terre (la terre étant assimilée à une sphère de centre O et de rayon R).

On donne R= 6380 km, λ=45° et période de révolution de la terre, T=24 h.

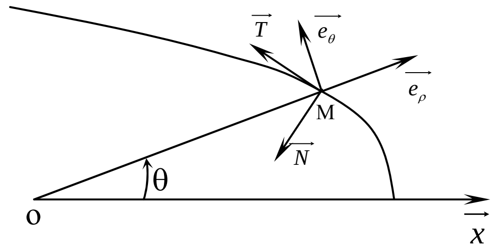


Exercice 03

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations de la trajectoire sont, en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r = r_0 \cdot e^{-\frac{t}{a}} \\ \theta = \dfrac{t}{a} \end{cases}$$

Avec, r_0 et a constantes positives.



1. Calculer le vecteur vitesse de la particule;
2. Montrer que l'angle $\left(\vec{v}, \vec{e_\theta}\right)$ est constant. Que vaut cet angle?
3. Calculer le vecteur accélération de la particule;
4. Montre que l'angle $\left(\vec{\gamma}, \vec{N}\right)$ est constant. Que vaut cet angle? (on se servira de la question 2);
5. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

VI. Changement du système de référence

VI. 1. Composition des mouvements (mouvement relatif)

Considérons :

- un repère S, matérialisé par un trièdre Oxyz
- un repère S_1, matérialisé par un trièdre $O_1x_1y_1z_1$ en mouvement par rapport à S
- un point M, en mouvement, défini par x,y,z dans le repère S et par x_1, y_1, z_1 dans le repère S_1

Par changement de coordonnées on peut passer du mouvement de M par rapport à S_1 au mouvement de M par rapport à S.

Il suffit d'appliquer la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$

Pour étudier un mouvement bien défini, on utilise les définitions suivantes :

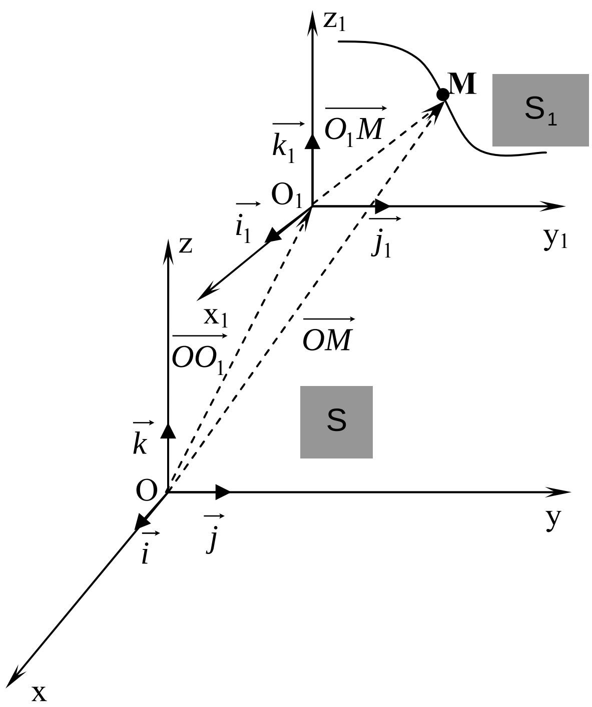
☛ le trièdre Oxyz (repère S) est le *repère absolu* ou *référentiel absolu* ;

☛ le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ (repère S_1) est le *repère relatif* ou *référentiel relatif* ;

☛ le mouvement du point M par rapport à « S » s'appelle *mouvement absolu ;*

☛ le mouvement du point M par rapport à « S_1 » s'appelle *mouvement relatif ;*

☛ le mouvement de « S_1 » par rapport à « S » s'appelle *mouvement d'entraînement ;*



VI. 2. Compositions des vitesses

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$\overrightarrow{v_a}$ vitesse absolue du point M

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}$$

Or $\overrightarrow{O_1M} = x_1\overrightarrow{i_1} + y_1\overrightarrow{j_1} + z_1\overrightarrow{k_1}$ dans le repère S_1

Il vient $$\overrightarrow{v_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt} + z_1\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}}_{\overrightarrow{v_e}} + \underbrace{\frac{dx_1}{dt}\overrightarrow{i_1} + \frac{dy_1}{dt}\overrightarrow{j_1} + \frac{dz_1}{dt}\overrightarrow{k_1}}_{\overrightarrow{v_r}}$$

donc $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}$

avec : $$\overrightarrow{v_r} = \frac{dx_1}{dt}\overrightarrow{i_1} + \frac{dy_1}{dt}\overrightarrow{j_1} + \frac{dz_1}{dt}\overrightarrow{k_1}$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1\frac{d\overrightarrow{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\overrightarrow{j_1}}{dt} + z_1\frac{d\overrightarrow{k_1}}{dt}$$

Cas particuliers

- si les repères S et S_1 sont fixes alors $\overrightarrow{v_e} = 0$ et $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}$

- si le repère S_1 est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à S, alors $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}$

Remarque

La dérivée d'un vecteur unitaire : $\dfrac{d\,\vec{u}}{dt}$ est obtenu par :

$$\frac{d\,\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{u} \qquad\qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ : vitesse angulaire}$$

De ce fait, la vitesse d'entraînement s'écrira alors :

$$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i_1}\right) + y_1\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j_1}\right) + z_1\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k_1}\right)$$

$$+ \vec{\omega} \wedge \left[x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}\right]$$

$$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

V. 3. Compositions des accélérations

$$\vec{\gamma_a} = \frac{d\,\vec{v_a}}{dt} = \frac{d\,\vec{v_e}}{dt} + \frac{d\,\vec{v_r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + x_1\frac{d\vec{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j_1}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right]$$

$$+\frac{d}{dt}\left[\frac{dx_1}{dt}\vec{i_1} + \frac{dy_1}{dt}\vec{j_1} + \frac{dz_1}{dt}\vec{k_1}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i_1}}{dt} + x_1\frac{d^2\vec{i_1}}{dt^2} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j_1}}{dt} + y_1\frac{d^2\vec{j_1}}{dt^2} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k_1}}{dt} + z_1\frac{d^2\vec{k_1}}{dt^2}$$

$$+\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i_1} + \frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i_1}}{dt} + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j_1} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j_1}}{dt} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k_1} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k_1}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma_a} = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i_1}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j_1}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k_1}}{dt^2}}_{\vec{\gamma_e}} + \underbrace{\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i_1} + + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j_1} + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k_1}}_{\vec{\gamma_r}}$$

$$\underbrace{+2\left[\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i_1}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j_1}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right]}_{\vec{\gamma_c}}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_c} \qquad \begin{cases} \vec{\gamma_e} : \textit{accélération d'entraînement} \\ \vec{\gamma_r} : \textit{accélération relative} \\ \vec{\gamma_c} : \textit{accélération complémentaire} \\ \quad \textit{ou accélération deCoriolis} \end{cases}$$

Remarque

En utilisant le fait que $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$

L'accélération de Coriolis devient:

$$\vec{\gamma_c} = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i_1}}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j_1}}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right)$$

$$= 2\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{i_1} + \frac{dy_1}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{j_1} + \frac{dz_1}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{k_1}\right)$$

$$= 2\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i_1} + \frac{dy_1}{dt}\vec{j_1} + \frac{dz_1}{dt}\vec{k_1}\right)$$

$$= 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r}$$

L'accélération d'entraînement devient :

$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i_1}}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j_1}}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k_1}}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i_1}\right) + y_1\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j_1}\right) + z_1\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k_1}\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + x_1\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i_1} + x_1\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{j_1} + y_1\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{j_1}}{dt}$$

$$+ z_1\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k_1} + z_1\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k_1}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \left(x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(x_1\frac{d\vec{i_1}}{dt} + y_1\frac{d\vec{j_1}}{dt} + z_1\frac{d\vec{k_1}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \left(x_1\vec{\omega} \wedge \vec{i_1} + y_1\vec{\omega} \wedge \vec{j_1} + z_1\vec{\omega} \wedge \vec{k_1}\right)$$

$$= \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \left\{\vec{\omega} \wedge \left(x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1} + z_1\vec{k_1}\right)\right\}$$

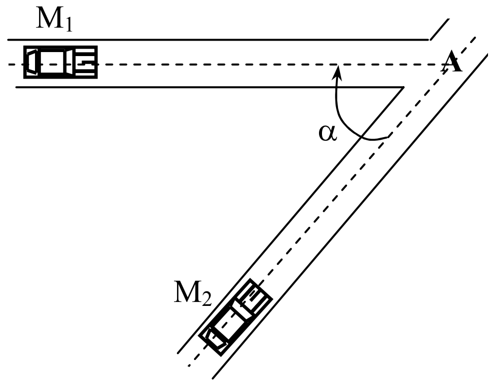
$$\Rightarrow \quad \vec{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$

VI. 4. Applications

Exercice 01

Deux Voitures M_1 et M_2 se déplacent à des vitesses constantes $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ selon deux directions, comme il est montré dans la figure, et se dirigent toutes les deux vers un point fixe A.

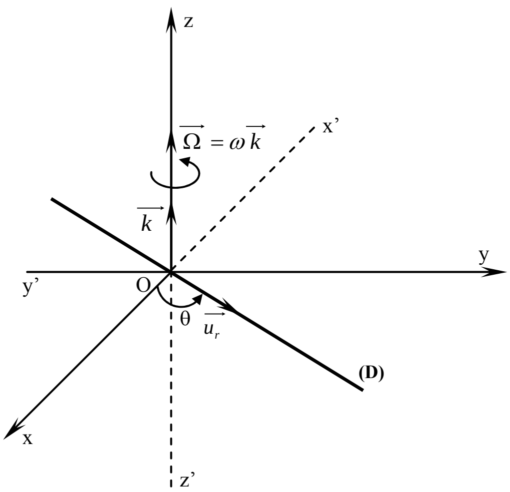
Déterminer la vitesse de la voiture M_1 par rapport à la voiture M_2.



Exercice 02

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige (D) tourne dans un plan horizontal (Oxy) autour de l'axe vertical Oz avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, où θ représente l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u_r})$ et $\vec{u_r}$ un vecteur unitaire de (D) voir Fig. 4.
Le mouvement du point matériel M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$$r = r_0(1 + \sin \omega t)$$



où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$.
On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Déterminer, pour l'anneau, dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$:

1. la vitesse et l'accélération relatives ;
2. la vitesse et l'accélération d'entraînement ;
3. l'accélération de Coriolis.

Exercice 03

Soit le système de la Figure ci-dessous qui est composé de deux tiges. La première tige est en rotation autour du centre O_0 relativement au référentiel galiléen. Une seconde tige est en rotation autour du centre O_1 relativement à la première tige.

1. On s'intéresse au mouvement de la tige (2) relativement à un référentiel R_1 lié à la tige (1). On travaillera dans le repère $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. L'angle $\psi(t)$ évolue de manière quelconque.

a. En se plaçant en coordonnées polaires dans le référentiel R_1, donner la position, la vitesse et l'accélération du point M ;

b. Sur un schéma, tracer les vecteurs $\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{v_{/R_1}(M)}, \overrightarrow{\gamma_{/R_1}(M)}$ ainsi que les vecteurs accélération tangentielle et accélération normale $\overrightarrow{\gamma_{N/R_1}(M)}$ et $\overrightarrow{\gamma_{T/R_1}(M)}$;

c. Donner en coordonnées cartésiennes, les vecteurs position, vitesse, accélération du point M relativement au référentiel R_1 ;

2. On se place maintenant dans le référentiel R_0. On travaillera dans la base $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$. L'angle $\theta(t)$ évolue de manière quelconque. Tous les résultats seront donnés en coordonnées cartésiennes en projection sur la base (x_1, y_1, z_1).

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\omega_{R_1/R_2}}$ dans la base (1) ;

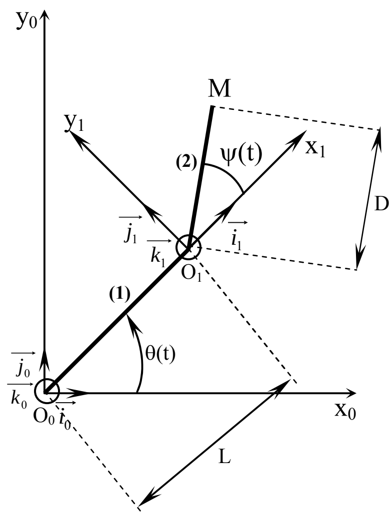
b. Calculer la vitesse du point P appartenant à (1), point coïncidant au point M, relativement au référentiel R_0, en projection dans la base (1). (Vitesse d'entraînement);

c. Calculer l'accélération du point P appartenant à (1), point coïncidant au point M, relativement au référentiel R_0, en projection dans la base (1);

d. Calculer l'accélération de Coriolis du point M de vitesse relative $\overrightarrow{v_{/R_1}(M)}$, relativement au référentiel R_0, en projection dans la base (1) ;

e. Déduire des questions précédentes la vitesses et l'accélération absolue du point M : $\overrightarrow{v_{/R_0}(M)}$ et $\overrightarrow{\gamma_{/R_0}(M)}$.

Fig. 5



VII. Mouvements les plus courants

VII. 1. Mouvement rectiligne uniforme

Il se caractérise par :

✓ une trajectoire rectiligne (une droite)

✓ une vitesse constante (v= cste)

✓ une accélération γ nulle (γ=0)

$$\gamma = 0 \qquad or \qquad v = \frac{dx}{dt} = cste$$

$$\Rightarrow dx = vdt \qquad donc \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

Donc d'une façon générale

$$x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$$

On peut distinguer trois cas :

- $t_0 = 0 \;;\; x_0 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = v \cdot t \;;$
- $t_0 = 0 \;;\; x_0 = x_0 \qquad \Rightarrow \quad x = v \cdot t + x_0 \;;$
- $t_0 = t_0 \;;\; x_0 = x_0 \qquad \Rightarrow \quad x = v \cdot (t - t_0) + x_0$

VII. 2. Mouvement circulaire uniforme

- la trajectoire est circulaire (circonférence) :
- vitesse linéaire et angulaire sont des constantes.

Loi du mouvement

Espace parcouru : $S = v \cdot t + S_0$ vitesse linéaire v=cste

S_0 : abscisse circulaire à l'instant origine

v : vitesse constante

S : abscisse du mobile à l'instant t.

Vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = Cste \quad (rd / s)$$

Relation entre v et ω.

$$v = \omega \cdot R = R\frac{d\theta}{dt} \qquad \begin{cases} R : \ rayon \ \ du \ cercle \\ v \ \ en \ \ m/s \ \ vitesse \ \ linéaire \\ \omega \ \ en \ \ rd/s \ \ vitesse \ \ angulaire \end{cases}$$

Si « T » est la durée d'un tour (période), alors la distance parcourue en 1 Tour est :

$$v \cdot T = 2\pi R$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi}{T} R = \omega \cdot R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \qquad (f : \textit{fréquence})$$

Souvent, la vitesse de rotation est exprimée en tour par seconde (n tr/s) ou bien en tours par minute (N tr/mn).

Dans ce cas, on écrit :

$$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \frac{N}{60} = \frac{N\pi}{30} \quad rd/s$$

Avec une abscisse circulaire nulle à l'instant origine (S_0=0), on a :

$$S = v \cdot t = \omega R t = \frac{N\pi}{30} R t$$

Angle balayé en radians :

$$\theta = \omega t \quad et \quad \theta = \theta_0 + \omega t \quad avec \quad \theta_0 \quad à \quad l'instant \quad origine$$

Il existe une analogie complète entre un mouvement rectiligne uniforme et un mouvement circulaire uniforme.

<u>*Accélération d'un point*</u> (dans un mouvement circulaire uniforme)

- $\overrightarrow{\gamma_t} = 0 \quad car \quad \omega = cste \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$
- $\overrightarrow{\gamma_n} = \omega^2 R \overrightarrow{n}, \qquad \overrightarrow{n}$: *vecteur unitaire dirigé vers le centre*

d'où $\gamma = \gamma_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \qquad car \quad \omega^2 = \frac{v^2}{R^2}$

VII. 3. Mouvement rectiligne uniformément varié

✓ trajectoire rectiligne ;

✓ accélération constante et non nulle.

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = cste$$

Si la vitesse croit, le mouvement est uniformément accéléré ;

Si la vitesse décroit, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).

Nous admettons, pour simplifier, que l'origine du temps correspond à l'origine du mouvement, on distingue trois cas :

1^er^ cas :

$$x_0 = 0 \quad , \quad v_0 = 0$$
$$\gamma = cste$$
$$v = \gamma \cdot t$$
$$x = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2$$

2^me^ cas :

$$x_0 = 0 \quad , \quad v_0 \neq 0$$
$$\gamma = cste$$
$$v = \gamma \cdot t + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

3^me^ cas :

$$x_0 \neq 0 \quad , \quad v_0 \neq 0$$
$$\gamma = cste$$
$$v = \gamma \cdot t + v_0$$
$$x = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

VII. 4. Mouvement circulaire uniformément varié

✓ trajectoire circulaire

✓ l'accélération angulaire est constante

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta'' = cste$$

Si la vitesse angulaire croit, le mouvement est uniformément accéléré ;

Si la vitesse angulaire décroit, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).

Nous admettons pour simplifier que l'origine du temps correspond à l'origine du mouvement, on distingue trois cas :

1^er^ cas :

$$S_0 = 0 \quad , \quad \theta_0 = 0 \quad , \quad \omega_0 = 0 \;\; \textit{vitesse angulaire initiale nulle}$$
$$\omega' = \theta'' = cste$$
$$\omega = \omega' t$$
$$\theta = \frac{1}{2}\omega' t^2$$

$\underline{2^{me}\ cas}$:

$$S_0 = 0 \quad , \quad \theta_0 = 0 \quad , \quad \omega_0 \neq 0 \ \ vitesse\ \ angulaire\ \ initiale \quad non\ nulle$$

$$\omega' = \theta'' = cste$$

$$\omega = \omega' t + \omega_0 \qquad\qquad avec \quad v = \omega R \qquad et \quad s = v\,t$$

$$\theta = \frac{1}{2}\omega' t^2 + \omega_0 t \qquad\qquad R : rayon\ \ correspondant\ \ au\ \ po\mathrm{int}\ considéré$$

$\underline{3^{me}\ cas}$:

$$S_0 \neq 0 \quad , \quad \theta_0 \neq 0 \quad , \quad \omega_0 \neq 0$$

$$\omega' = \theta'' = cste$$

$$\omega = \omega' t + \omega_0 \qquad\qquad avec \quad v = \omega R \ \ et \quad S = v\,t + S_0$$

$$\theta = \frac{1}{2}\omega' t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

Accélération d'un point situé au rayon R

$$\vec{\gamma}\begin{cases}\overrightarrow{\gamma_t} = R\dfrac{d\omega}{dt}\vec{\tau} & \gamma_t = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\,\omega' \\ \overrightarrow{\gamma_n} = \omega^2 R\,\vec{n} & \gamma_n = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}\end{cases}$$

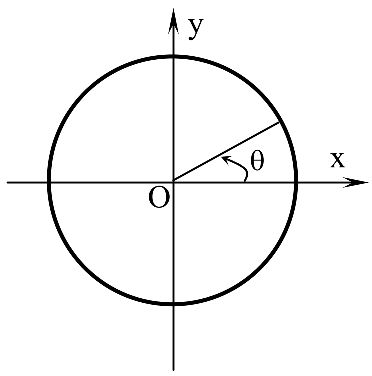
VII. 5. Application

Exercice

On considère une roue turbine tournant à la vitesse de rotation de N_0= 10 000 tr/mn. Après coupure du courant la turbine s'arrête en 3 mn.

1. A quel type de mouvement avons-nous à faire après la coupure du courant? que peut on en déduire en ce qui concerne l'accélération ?
2. Déterminez l'équation du mouvement $\theta(t) = f(t)$ et calculer les valeurs de la vitesse angulaire et l'accélération angulaire, sachant qu'à t=0 on a θ_0=0.
3. Calculer le nombre de tours qu'effectue la turbine jusqu'à l'arrêt.

Rq : On exprimera les angles en radian.



VII. Terminologie (المصطلحات)

Point matériel…………………………………………….....نقطة مادية
Dimensions…………………………………….………الأبعاد
Cinématique du point ………………………….………حركيات النقطة المادية
Assimilé à un point…………………………………..….يعتبر كنقطة مادية
Concentré en un point……………………………….…متمركز في نقطة
Négligeable…………………………………………....مهمل
Centre de masse……………………………………..….مركز الكتلة
Trajectoire………………………………………………..مسار
Successives ………………………………………………متتالية
Rectiligne…………………………………………………خطي
Curviligne………………………………………………...منحني
Equation du mouvement……………………………….....معادلة الحركة
Equation horaire…………………………………..………المعادلة الزمنية
Définition intrinsèque du mouvement………………...….تعريف ضمني للحركة
Composante…………………………………………….…مركبة
Abscisse curviligne……………………………………… فاصلة منحنية
Ordonnée……………………………………..…………الترتيبية
Mobile………………………………………………..…..متحرك
Intervalle…………………………………………………مجال
Antérieur…………………………………………………..قبلي
Postérieur………………………………………………….بعدي
Changement d'origine………………………………..……تحويل أو تغيير المبدأ
Mouvement rectiligne et uniforme……………….………..حركة مستقيمة منتظمة
Vitesse instantanée……………………………..……… سرعة لحظية
Vitesse moyenne……………………………………….....سرعة متوسطة
Vitesse linéaire………………………………….….…….سرعة خطية
Vitesse angulaire……………………………………….....سرعة زاوية
Vitesse de rotation ………………………………………..سرعة دورانية
Vitesse initiale……………………………………………..سرعة إبتدائية
Tangent………………………………..……………….…مماسي
Coordonnées cartésiennes………………………….……...إحداثيات ديكارتية
Par analogie……………………………………..………..بالتماثل/بالمماثلة
Vecteur unitaire……………………………………………شعاع الوحدة
Expression………………………………………….………عبارة
Rayon de courbure…………………………………………نصف قطر الإنحناء
Centre de courbure………………………………………..مركز الإنحناء
Constant………………………………………………..…ثابت
Point immobile………………………………………….…نقطة ساكنة
Cinématique du solide ……………………………………حركيات الجسم الصلب
Mouvement de translation…………………………………حركة إنسحابية
Mouvement de rotation……………………………………حركة دورانية
Repère……………………………………………………….معلم
Fréquence…………………………………………………..تواتر/تردد
Angle balayé………………………………………………..زاوية ممسوحة
Mouvement rectiligne uniformément varié……….……….حركة مستقيمة متغيرة بانتظام

Chapitre III

Dynamique du point matériel

I. Généralités

La cinématique a pour objet l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les provoquent.

La dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes des mouvements de ces corps

II. Le principe d'inertie (1ière loi de Newton)

C'est Galilée qui a le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

« Tout objet conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur lui »

Cette 1ière loi peut aussi s'énoncer :

Si aucune force n'agit sur un objet ou si la force résultante est nulle,

- Un objet au repos reste au repos ;
- Un objet en mouvement continue à se mouvoir à vitesse constante.

Remarque

Cette 1$^{\text{ière}}$ loi de Newton, telle qu'elle a été énoncée, ne s'applique pas à un observateur soumis à une accélération. Elle nous amène à définir un référentiel d'inertie.

III. Référentiels d'inertie ou galiléens

On appelle référentiel d'inertie, un système de référence (ou repère) dans lequel la première loi de Newton est applicable. D'après cette définition, un référentiel d'inertie n'existe pas ; on ne dispose que de référentiels approximatifs.

Exemples

Pour la plupart des expériences que l'on peut réaliser sur terre, le repère au sol constitue un bon repère d'inertie, alors que pour le mouvement d'un point ce repère lié au sol n'est pas un repère d'inertie.

Si l'on choisit un système d'axes liés au *Soleil* et dirigés vers certaines étoiles, le mouvement d'une planète du système solaire devient simple (*référentiel de COPERNIC*). Pour ce mouvement le repère lié au *Soleil* est un bon repère d'inertie.

Remarque

✓ Tout système de coordonnées qui se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie, peut être lui-même considéré comme un référentiel d'inertie.

✓ Les vitesses et les accélérations des corps, mesurées dans les référentiels galiléens, sont dites absolues et celles mesurées dans les référentiels non galiléens sont dites relatives.

IV. Masse et centre d'inertie

Masse

La masse d'un système caractérise la quantité de matière qu'il renferme. Elle est invariable dans la mécanique newtonienne. Dans la mécanique relativiste, elle dépend de la vitesse à travers l'expression :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

avec:

m_0, la masse au repos

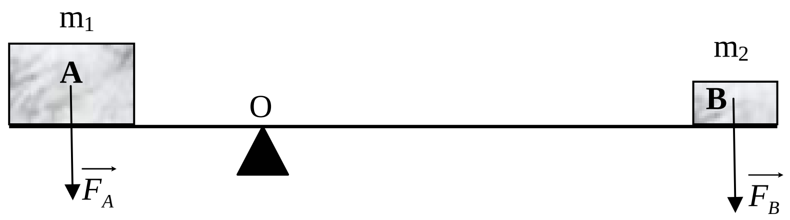
m, la masse à la vitesse v.

c, vitesse de la lumière, $c \approx 3\ 10^8\ m.s^{-1}$

<u>Centre d'inertie ou Barycentre</u>

Appelé aussi moment d'inertie ou centre de gravité. Il a été défini au début par le physicien *Archimède*.

Pour avoir la relation donnant le point centre d'inertie d'un système quelconque, étudions l'équilibre du système présenté dans la figure suivante :



Pour que le système soit en équilibre il faut que la somme des moments des forces par rapport à O soit nulle : $\sum \overrightarrow{M^{0}_{\overrightarrow{F_i}}} = \vec{0}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\overrightarrow{M^{0}_{\overrightarrow{F_A}}} + \overrightarrow{M^{O}_{\overrightarrow{F_B}}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \vec{0}$$

> ***<u>Rq</u>***: Voir Chapitre I, page 15, pour la définition du moment d'une force (un vecteur) par rapport à un point.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m_2 \vec{g} = \vec{0}$$

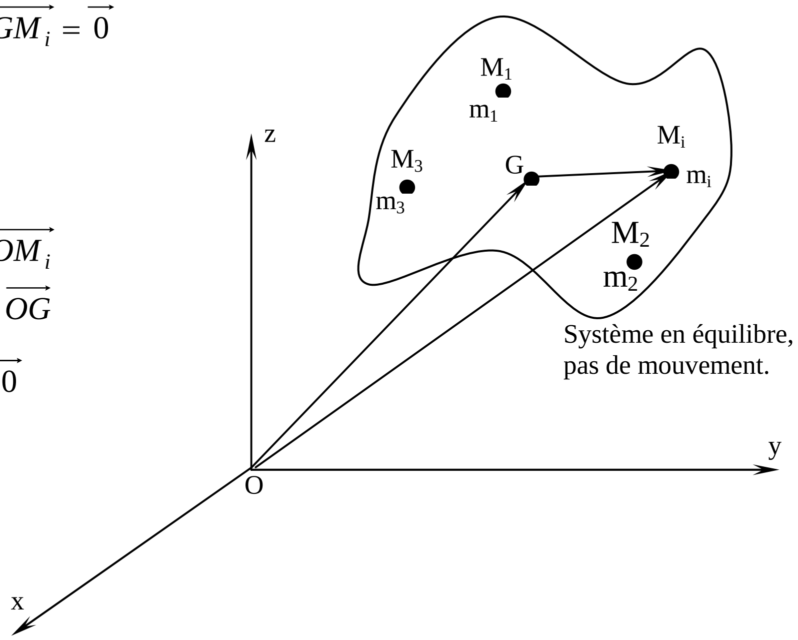
$$\Rightarrow \quad m_1 \overrightarrow{OA} \wedge \vec{g} + m_2 \overrightarrow{OB} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}\right) \wedge \vec{g} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \quad m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

Les mathématiciens ont généralisé cette égalité pour un système quelconque représenté par la figure ci-dessous

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} + ...m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$



D'autre part,

$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$$

Donc $\quad \sum_i m_i \left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{M}$$

M: représente la masse totale du système en équilibre.

Cette dernière relation donne le centre d'inertie d'un système constitué de masses m_i situées aux points M_i. Si le système forme un milieu continu, la somme devient intégrale, et par conséquent, la relation précédente deviendra :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_M \overrightarrow{OM} \, dM$$

L'intégrale est triple parce que la masse est répartie en volume, trois dimensions.

V. Vecteur quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse *m* et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est défini par le vecteur $\vec{P}$ donné par :

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle qui a la même direction que la vitesse.

Le principe d'inertie peut s'énoncer alors de la façon suivante :

✦ Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen.

Ou encore

✦ La quantité de mouvement totale d'un système, se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

VI. Notion de Force : *2^{ième} loi de Newton*

Toute cause capable de modifier, dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée ***FORCE***.

Différentes types de forces existent :

- Forces d'interaction à distance (Forces de gravitation) ;
- Forces électromagnétiques ;
- Forces nucléaires ;
- Forces de contact (Forces de frottement) ;

- etc….

On peut très bien définir une force moyenne, telle que,

$$\overrightarrow{F_{moy}} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(t') - \vec{P}(t)}{t' - t}$$

Ou encore, force instantanée, telle que,

$$\vec{F}(t) = \lim_{t' \to t} \overrightarrow{F_{moy}} = \frac{d\vec{P}(t)}{dt}$$

✓*<u>Loi Fondamentale de la dynamique</u> ou Principe Fondamental de la Dynamique* ***(PFD)***

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{\gamma}$$

✓*<u>Théorème du centre d'inertie</u>*

Le mouvement de translation d'un système se ramène à celui de son centre d'inertie *G* auquel on applique toutes les forces.

✓*<u>Théorème du moment cinétique</u>*

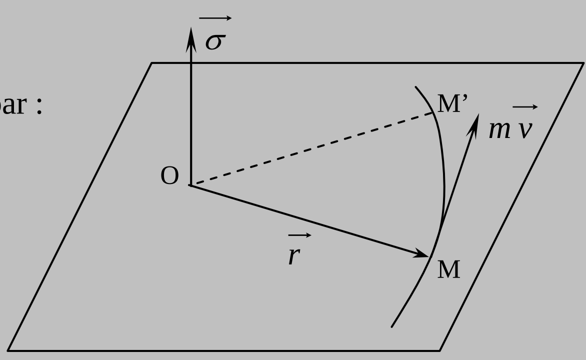
Le moment cinétique du point *M* se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ et ayant une masse *m* par rapport à *O* est défini par : $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{M^{t}_{0\vec{F}}}$$



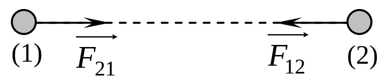
<u>Remarque</u> : pour l'étude des systèmes dynamiques, on utilise généralement ces deux théorèmes et le principe fondamental de la dynamique noté PFD.

VII. **Principe de l'action et de la réaction** : *3^{ième} loi de Newton*

Le principe de l'action et de la réaction, ou principe des réactions réciproques, a été énoncé par *Newton* (*3^{ième} loi de Newton*).

Soient deux points matériels (1) et (2) interagissant entre eux ; l'action exercée par (1) sur (2) $\overrightarrow{F_{12}}$ est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) $\overrightarrow{F_{21}}$, soit

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}} \qquad \left(\left|\overrightarrow{F_{12}}\right| = \left|\overrightarrow{F_{21}}\right|\right)$$



C'est deux actions (forces) s'exercent simultanément et sont de même nature.

<u>Exemple de forces</u>

1. ***<u>Forces d'interaction à distances</u>***

a. <u>Forces de gravitation newtonienne</u>

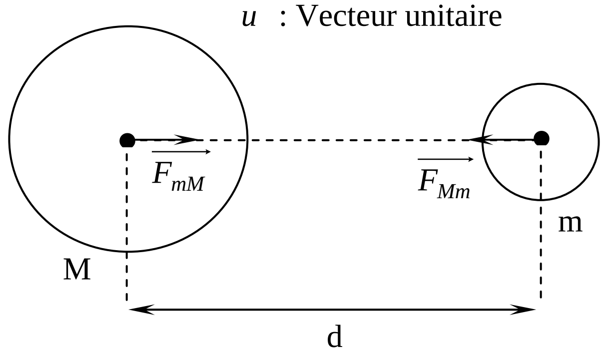
On appelle force de gravitation ou force d'interaction gravitationnelle, la force exercée par une masse *M* sur une autre masse *m*. Cette force d'interaction suit une loi énoncée par *Newton* en 1650.

$$\overrightarrow{F_{M-m}} = -G\frac{mM}{d^2}\vec{u}$$

$\vec{u}$: Vecteur unitaire

G : une constante

G=6,67 10^{11} $m^3Kg^{-1}s^{-2}$

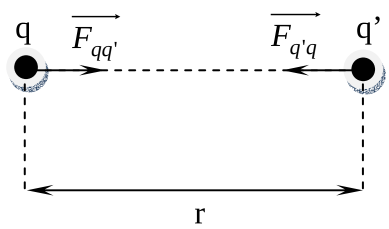


b. *<u>Interaction coulombienne</u>*

L'interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour les charges électriques.

$$\left|\overrightarrow{F_{qq'}}\right| = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{r^2} = K\frac{q\,q'}{r^2}$$

avec $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\ 10^9\ \ mc^2Kg\,s^{-2}$

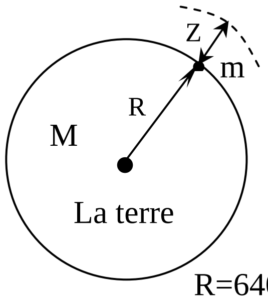


Notion de Champ

✓*Champ de pesanteur*

Soit le cas d'un objet sur la surface de la terre

$$\overrightarrow{F_{M-m}} = -G\frac{mM}{R^2}\vec{u}$$



R=6400 km

M : masse de la terre ;

m : masse de l'objet ;

R : rayon de la terre.

On pose $\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}$: champ de pesanteur

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_{M-m}} = m\vec{g}$ force du poids de l'objet en question

Si le corps se trouve à une hauteur z par rapport à la surface de la terre, alors,

$$\overrightarrow{F_{M-m}} = -G\frac{mM}{(R+z)^2}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{g}\right| = G\frac{M}{(R+z)^2} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{R^2}{(R+z)^2}$$

$\Rightarrow \quad g = g_0\frac{R^2}{(R+z)^2}$ avec g_0 : champ à la surface de la terre

aussi, on peut écrire que : $g = g_0(1+\frac{z}{R})^{-2}$

pour z<<R, et en utilisant un développement limité du premier ordre :

$$g \cong g_0(1-2\frac{z}{R})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta g = g - g_0 = \frac{2z}{R}g_0$$

Donc la variation relative est $\frac{\Delta g}{g_0} = \frac{2z}{R}$

Pour z <32 Km, on a $\frac{\Delta g}{g_0} < 1\%$

Donc, on considère le champ de pesanteur comme localement uniforme.

✓*Champ électrique*

Par analogie avec le champ de la pesanteur, on définit le champ électrique, tel que :

$$\overrightarrow{F_{qq'}} = q\vec{E}$$

avec $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^2}\vec{u}$$

c. *<u>Interaction électromagnétique</u>*

La force que subit une charge électrique placée dans des champs $\vec{E}$ (électrique) et $\vec{B}$ (magnétique) est appelée forces électromagnétique ou force de Lorentz:

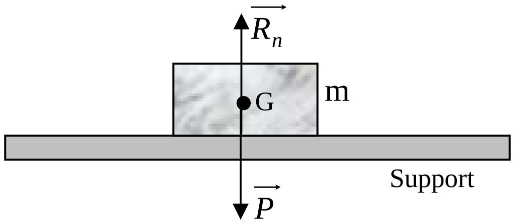
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

2. *<u>Forces de contact</u>*

a. *<u>Réaction du support</u>*

La force que subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance du support s'appelle réaction du support.

La réaction du support sur l'objet m est répartie sur toute la surface de contact support-objet $\vec{R_n}$, représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.



L'objet étant en équilibre $\vec{P} + \vec{R_n} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{R_n}$

b. *<u>Forces de frottement</u>*

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer.

Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement. Il y a deux types de frottement :

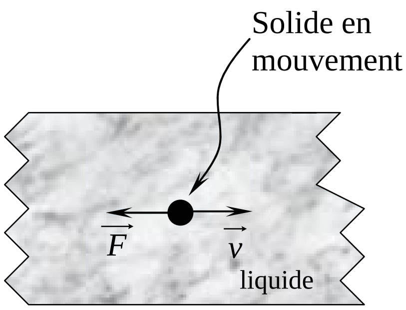
- frottement visqueux (contact solide-fluide)
- frottement solide (contact solide-solide)

✓ *<u>Frottement visqueux</u>*

Dans ce type de frottement la force est proportionnelle à la vitesse,

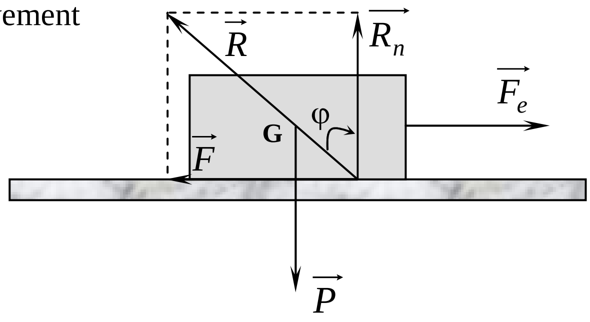
$\vec{F} = -k\vec{v}$ $\vec{F}$: force de frottement

k: constante positive.



✓ *Frottement solide*

Dans cette figure, le bloc solide est en mouvement sous l'action de la force d'entraînement $\overrightarrow{F_e}$.



- $\overrightarrow{F_e}$: Force d'entraînement ;
- $\overrightarrow{R_n}$: Force de réaction ;
- $\vec{F}$: Force de frottement ;
- φ : angle de frottement.

$F = \mu R_n$ en module.

avec : μ coefficient de frottement ou coefficient de friction : c'est une constante qui dépend de la nature de la surface de contact.

On a : $\dfrac{F}{R_n} = tg\varphi = \mu$

Quelques valeurs de μ $\rightarrow$

Matériaux	μ
Acier-Acier	0.2
Chêne-Sapin	0.67
Caoutchouc-bitume	0.6

$\vec{F}$ est maximale quant sous l'action de $\overrightarrow{F_e}$ le corps solide est toujours en équilibre (pas de mouvement). A partir de cette valeur, si $\overrightarrow{F_e}$ augmente, le corps solide bouge de sa position d'équilibre.

Condition d'équilibre : $R_n = P \quad et \quad F_e = F$

$$\Rightarrow \frac{F}{R_n} = tg\varphi = \frac{F_e}{P}$$

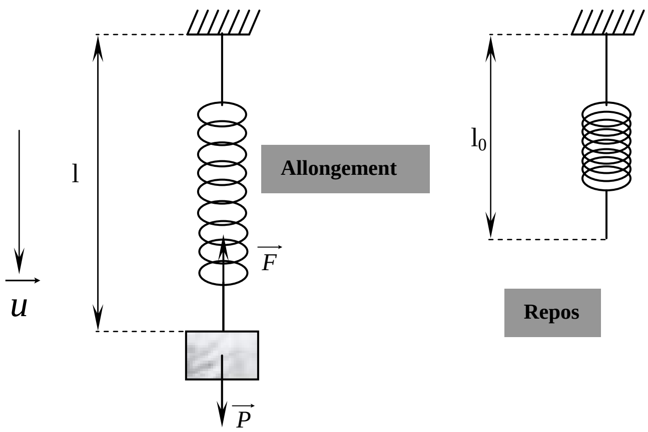
c. *Forces de tension*

Force de tension ou force de rappel. L'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.

$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$

k : coefficient d'allongement

(coefficient de raideur du ressort)



VIII. Applications

Exercice 01

Soit le pendule simple de la figure 01. La masse « m » est assimilée à un point matériel.

1. Déterminer l'équation du mouvement de ce pendule pour les faibles oscillations. On travaillera pour la détermination de l'équation du mouvement dans une base polaire liée à la masse *m* et on utilisera le P. F. D.
2. Déterminer la même équation du mouvement, toujours pour les faibles oscillations, en utilisant cette fois le théorème du Moment Cinétique.

Exercice 02

Un traîneau de masse m=200Kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle β avec celle-ci (Fig. 02).

1. La tension du câble vaut T=1000 N. Le mouvement étant uniforme de vitesse $v=10\ km.h^{-1}$; déterminer la réaction $\overrightarrow{R}$ somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau.

AN: $\alpha=20°$, $\beta=30°$, $g=10\ ms^{-2}$.

2. On augmente la tension et le mouvement du traîneau devient uniformément accéléré.

a. Le coefficient de frottement traîneau-sol restant identique, la réaction $\overrightarrow{R}$ est-elle modifiée?

b. La vitesse du traîneau passe de $10\ Km\ H^{-1}$ à $20\ Km\ H^{-1}$ sur une distance de 10 m. Calculer la puissance exercée par la tension T du câble lorsque la vitesse vaut $15\ Km\ H^{-1}$.

Exercice 03

Trois solides identiques, A, B et C, assimilés à des points matériels de mêmes masses *m*, sont liés comme l'indique la figure 03.

Nous négligeons la masse des fils et nous admettons que leur tension est la même de part et d'autre des poulies.

Déterminer la tension de chacun des fils en supposant qu'il n'y ait pas de frottements

Fig. 01

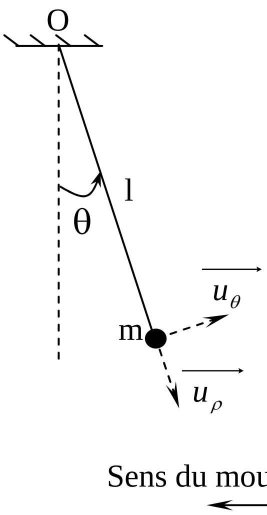
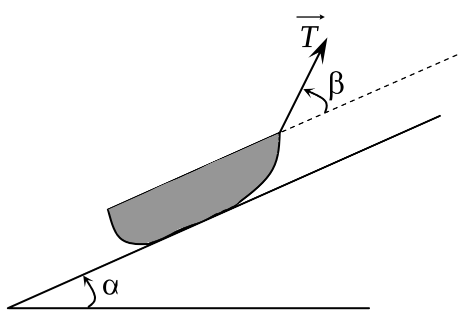


Fig. 02



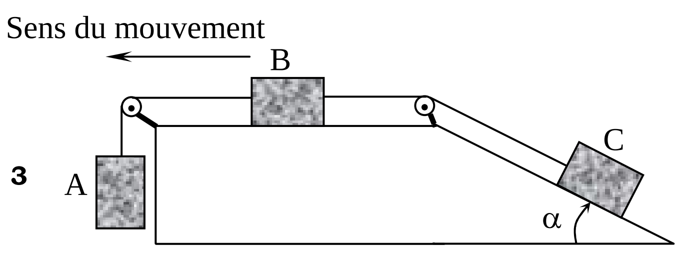


Fig. 3

Chapitre IV

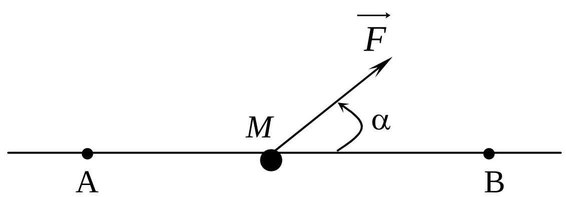
Travail, Puissance et Energie

I. Travail d'une force

I. 1. Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit une force constante agissant sur un point matériel *M*. Sous l'effet de $\overrightarrow{F}$, *M* se déplace entre les points A et B.

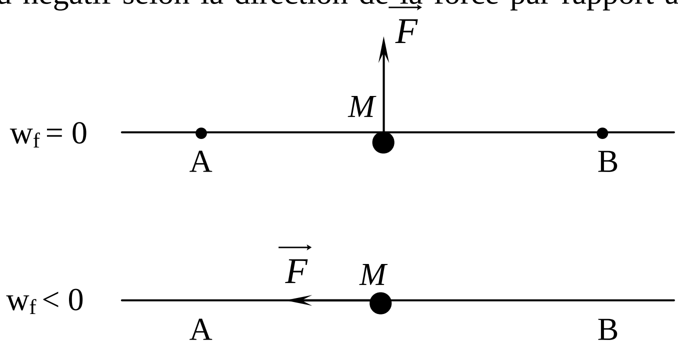
Par définition, le travail de la force $\overrightarrow{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :



$$w_{\overrightarrow{F}} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha \,,$$ α est l'angle que fait $\overrightarrow{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$

Remarque

Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force par rapport au déplacement.

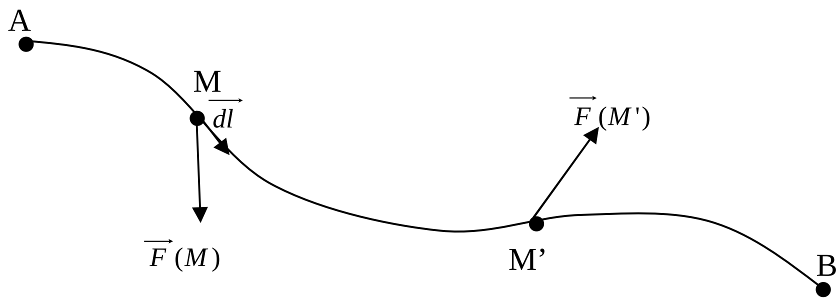


L'unité de travail, dans le système MKSA, est le **Joule**.

I. 2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente.

On décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes.



Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

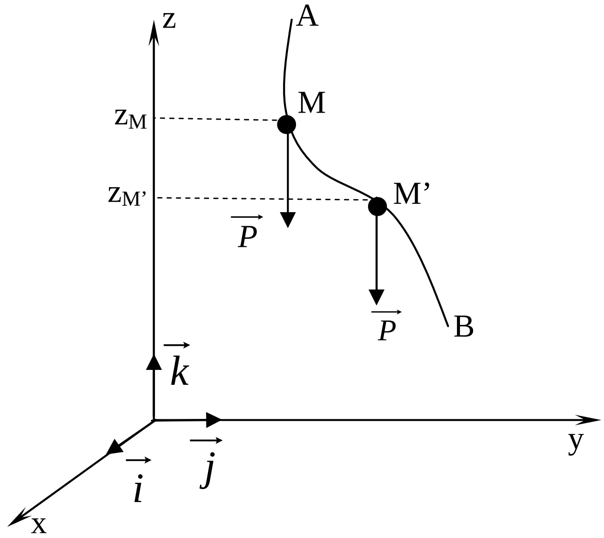
I. 3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total sur le déplacement total,

il suffit d'additionner les travaux élémentaires.

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

I. 4. Travail de la force de pesanteur



$h = z_M - z_{M'}$

$$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}\cdot\vec{dl}$$

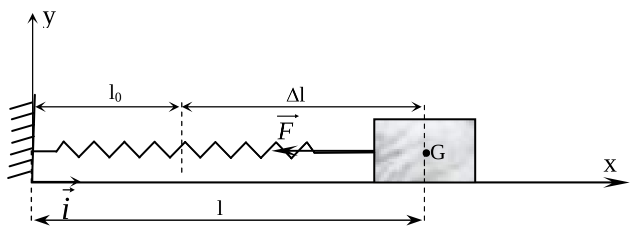
et $\vec{P} = -P\vec{k}$, $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{P}\,\vec{dl} = -P\,dz$

donc, $w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}\cdot\vec{dl} = \int_M^{M'} -Pdz = -P(z_{M'} - z_M)$

$\Rightarrow \quad w_{\vec{P}} = P(z_M - z_{M'}) = P\,h = mg\,h$

I. 5. Travail d'une force élastique



$$\vec{F} = -k\,\Delta l\vec{i} = -k(l - l_0)\vec{i}$$
$$= -k\,x\vec{i}$$

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}\,\vec{dl} = -kx\vec{i}\,dx\vec{i} = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$$

Lorsque $\vec{F}$ passe d'une position x_1 à x_2 , on a :

$$w_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\,\vec{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)$$

II. puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le rapport du travail de celle-ci au temps mis pour l'accomplir. Selon la durée considérée, cette puissance est dite moyenne ou instantanée. L'unité de la puissance, dans le système MKSA, est le Watt.

Puissance moyenne : $P_{moy} = \dfrac{\Delta w_{\vec{F}}}{\Delta t}$

Puissance instantanée : $P(t) = \dfrac{dw_{\vec{F}}}{dt}$

III. Energie

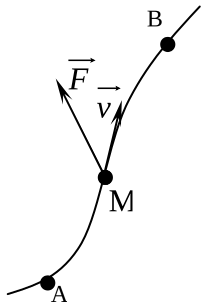
III. 1. Energie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel *M*, de masse *m* et animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_c, telle que,

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Soit un point matériel *M*, de masse m, en déplacement entre les points *A* et *B* sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$. Selon le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$



Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{dl} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt$$

car $\vec{v}(t) = \dfrac{\vec{dl}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{dl} = \cdot\,\vec{v}(t)\,dt$

il vient $\qquad dw_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{dl} = d\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$

Le travail effectué entre les points *A* et *B* sera :

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A)$$

III.2. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$E_c(B) - E_C(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{ext}})$$

III. 3. Forces conservatrices et non conservatrices

Les forces sont dites conservatrices lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples

- force de pesanteur ;
- force du poids ;
- force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatrices ou forces vives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple

Force de frottement.

III. 4. Energie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatrices ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une *fonction d'état* appelée *énergie potentielle* E_p

$$E_p(B) - E_p(A) = -w_{AB}(\overrightarrow{F_c}),$$

avec $\overrightarrow{F_c}$: force conservatrice.

$$\Delta E_p = -w_{AB}(\overrightarrow{F_c})$$

Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_p \rightarrow dE_p$.

En utilisant la notion du travail élémentaire, on a :

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{dl}$$

D'autre part, soit le gradient ($\overrightarrow{grad}$) d'une fonction f défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

La différentielle totale de f est donnée par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

On définit un point *M*, repéré dans le référentiel Oxyz par son vecteur $\overrightarrow{OM}$, tel que,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k} \qquad \Rightarrow \qquad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$$

Alors

$$\overrightarrow{grad}\, f \cdot d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Il vient, $\overrightarrow{grad}\, f \cdot d\overrightarrow{OM} = df$ ✦

A partir de l'équation (✦), on peut facilement remarquer que puisque

$$dE_p = -\overrightarrow{F_c} \cdot \overrightarrow{dl} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{i} + dz\,\vec{k}$$

alors,

$$\boxed{\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p}$$

IV. 5. Exemples de forces conservatrices

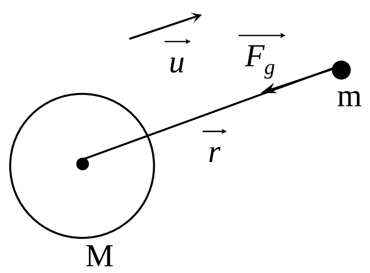
✓ *Force gravitationnelle*

$\overrightarrow{F_g}$ est une force conservatrice.

$$\overrightarrow{F_g}(r) = -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}$$

$$= -G\frac{M\,m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$



$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_g} = -G\frac{M\,m}{r^3}\vec{r}$$

$$\overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{grad}\, E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}$$

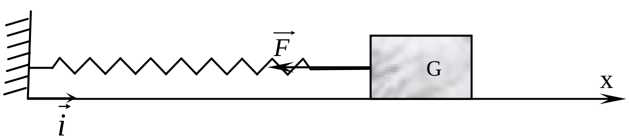
$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dr} = G\frac{M\,m}{r^2}$$

$$E_p(r) = \int G\frac{M\,m}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow \quad E_p(r) = G\frac{M\,m}{r} + cste$$

✓ *Force élastique*

$\vec{F} = -k\,x\vec{i}$



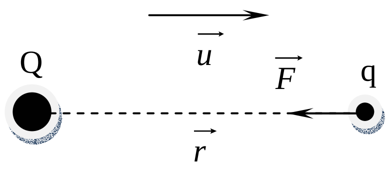
$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dx} = k\,x$$

$$\Rightarrow \quad E_p = \int k\,x\,dx = \frac{1}{2}k\,x^2 + cste$$

✓ *Force électrique*

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} = K\frac{Qq}{r^2}$$



En suivant le même raisonnement que précédemment, on aura :

$$E_p = -kQq\frac{1}{r} + cste$$

III. 6. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points *A* et *B* sous l'effet de forces conservatrices et non conservatrices. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$E_c(B) - E_C(A) = \sum w_{A-B}(\vec{F_C}) + \sum w_{A-B}(\vec{F_{NC}})$$

$\vec{F_C}$: Force conservatrice ;

$\vec{F_{NC}}$: Force non conservatrice.

Alors $\quad E_c(B) - E_C(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum w_{A-B}(\vec{F_{NC}})$

puisque $\quad \sum w_{A-B}(\vec{F_C}) = \left(E_p(A) - E_p(B)\right)$

il vient $\quad E_c(B) + E_p(B) - \left(E_C(A) + E_p(A)\right) = \sum w_{A-B}(\vec{F_{NC}})$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler *Energie Total* du système Symbolisée par (*E*), telle que,

$$E = E_c + E_p = Energie\,Cinétique + Energie\,Potentielle$$

Alors, entre les deux points *A* et *B*

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\vec{F_{NC}})$$

Théorème de l'énergie mécanique totale

La variation de l'énergie mécanique totale d'un système, en mouvement entre deux points *A* et *B*, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatrices appliquées à ce système,

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\vec{F_{NC}})$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservatrice) l'énergie totale se conserve.

V. Stabilité d'un système

V. 1. Définition de la stabilité

Pour un système soumis uniquement à une force conservatrice $\overrightarrow{F_c}$, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que:

$$\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Dans le cas où l'énergie ne dépend que d'une variable x, cela revient à dire que:

$$\overrightarrow{F_c} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

La condition d'équilibre, pour l'importe quel système soumis à un ensemble de forces, est que la somme ou la résultante de l'ensemble des forces est égale à zéro ($\sum \vec{F} = \vec{0}$). Dans le cas d'un système soumis uniquement à une force conservatrice $\overrightarrow{F_c}$, celle-ci devrait être nulle, il vient:

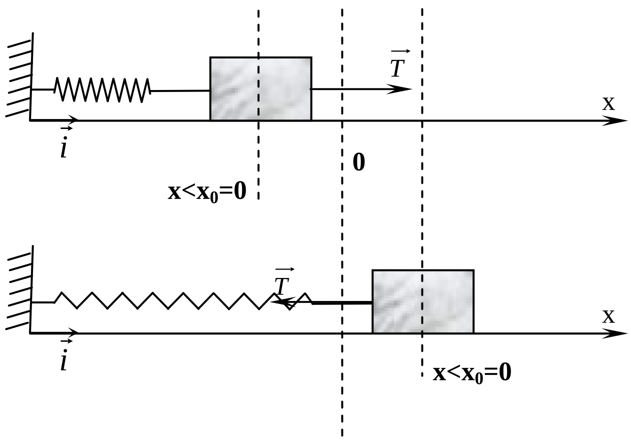
$$F_c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE_p}{dx} = 0$$

Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle. En d'autre terme, l'énergie potentielle devrait être maximale ou minimale pour qu le système soit en équilibre.

Un équilibre est dit **stable** si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celle-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit **instable**.

V. 2. Condition de stabilité

Soit le cas de la figure ci-dessous, cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x.



Position d'équilibre $x_0=0$

Supposant que la dérivée de l'énergie potentielle à x_0 est nulle ($\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0$). Pour une perturbation amenant le système à $x<x_0$, la valeur algébrique de la force doit être positive pour ramener le système vers x_0 $F_c > 0$ donc,

$$\frac{dE_p}{dx} < 0 \qquad puisque \qquad F_c = -\frac{dE_p}{dx}$$

Dans le cas contraire $x>x_0$, la force doit être négative et donc $\frac{dE_p}{dx} > 0$.

L'énergie potentielle E_p décroît avant x_0 et est croissante après x_0. Elle présente donc un minimum pour $x=x_0$.

Dans ce cas, la fonction $\frac{dE_p}{dx}$ est une fonction croissante qui s'annule pour $x=x_0$. La condition de stabilité, c'est-à-dire, E_p minimale, peut donc se traduire par $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$ au voisinage de x_0 et donc pour $x=x_0$. Dans le cas contraire, la position sera une position d'équilibre instable.

Equilibre stable pour $x=x_0$ $\Leftrightarrow$ $E_p(x_0)$ minimale

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Equilibre instable pour $x=x_0$ $\Leftrightarrow$ $E_p(x_0)$ maximale

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$$

Un système, livré à lui-même, évolue spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

VI. Applications

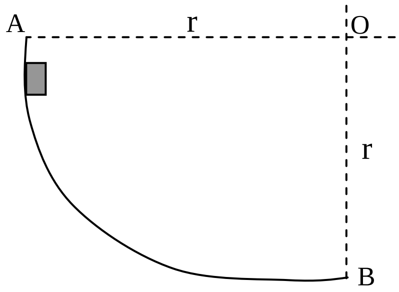
Exercice 01

Un solide de masse m=500 g peut glisser sans frottement sur une piste circulaire de rayon r=1 m (Fig. 01). Il part d'un point A sans vitesse initiale.

1. Déterminer la vitesse du solide au point B.

2. En réalité, la vitesse en B est de 3,5 ms^{-1}. Déterminer le travail des forces de frottement puis en déduire l'intensité, supposée constante, de la résultante des ces forces de frottement.

Fig. 01



Exercice 02

Dans un référentiel galiléen, un point matériel M, de masse m, considéré comme ponctuel, peut coulisser sans frottement sur une tige rigide horizontale fixe x'Ox (Fig. 02). Cette masse est attachée à l'extrémité d'un ressort, de masse négligeable, fixé en un point fixe A, distant de OA = h_0 de l'axe x'Ox. La position instantanée de la masse sur la tige est notée OM = x. La longueur au repos du ressort est l_0, et sa raideur est k. On se place dans un cas où : $l_0 < h_0$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle U(x) de la masse m, en fonction de k, h_0, l_0 et x. On prendra U(x) = 0 pour x = 0.

2. Représenter schématiquement la fonction U(x) en fonction de x. Déterminer la position d'équilibre de x_e de la masse m. Cet équilibre est-il stable ou instable ?

Fig. 02