***Université A. Mira de Béjaia***
***Faculté des Sciences Exactes***
***Domaine : Sciences de la Matière***
***Département de Physique/SM***

***Année 2010/2011***
***Semestre 2***
***Année d'étude : 1ère année SM***
***13 Juin 2011 (13h30-15h30)***

# ~ Examen final ~

## Matière: Compléments Mathématiques 2

### Exercice 1 (03 points)

Un solide est limité par la surface d'un cylindre d'axe $OZ$, de rayon $R=2$, et de hauteur $h=1$. Sa base inférieure est située en $z=0$.

Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{V}=2x\,\vec{i}-(z-1)\vec{k}$ à travers la base supérieure et à travers la base inférieure de ce cylindre.

### Exercice 2 (03 points)

Considérant un cercle de centre $O$ et de rayon $R$. Soit $M$ un point de ce cercle tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{r}=R\,\vec{e}_r$. $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM}$. Soit $M'$ un deuxième point appartenant au cercle et très voisin du point $M$ tel que $\overrightarrow{MM'}=d\vec{r}$.

1. Exprimer $d\vec{r}$ dans la base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires.
2. Déterminer la circulation des champs vectoriels $\vec{V}$ et $\vec{W}$ ci-dessous le long de ce cercle.

   $\vec{V}(r)=k\,\vec{r}$ et $\vec{W}(r)=\lambda\dfrac{\vec{r}}{r^3}$. $k$ et $\lambda$ sont des constantes.

### Exercice 3 (06 points)

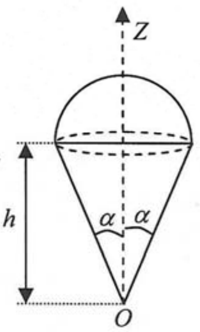
1. Soit $f$ une fonction scalaire définie et dérivable en tout point $M$ de l'espace.

   Montrer que dans la base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$, associée aux coordonnées sphériques $(r,\theta,\varphi)$, $\overrightarrow{grad}\,f$ est donné par l'expression : $\overrightarrow{grad}\,f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)\vec{e}_r+\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\theta+\left(\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi$.
2. Considérant les champs scalaires $f$ et $g$, donnés en tout point $M$ de l'espace par :

   $f(M)=3r^3\sin^2\theta\cos\theta\sin 2\varphi$ ; $g(M)=2x-1$.

   Exprimer $\overrightarrow{grad}\,f$ et $\overrightarrow{grad}\,g$ dans la base locale $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ et dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ associée aux coordonnées cartésiennes.

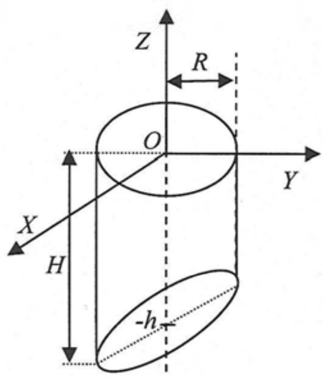
### Exercice 4 (05 points)




Un enfant achète un cornet de glace. La glace fait une demi-boule (*sphérique*) et remplit le cornet (*de forme conique*) de hauteur $h=11\ cm$ et d'angle $2\alpha=30°$ (*figure ci-contre*).

1. En utilisant le système de coordonnées sphériques, <u>ou polaires</u>, calculer le volume $V_b$ de la demi-boule en fonction de $h$ et de $tg\alpha$.
2. Calculer le volume $V_c$ du cornet en fonction de $h$ et de $tg\alpha$.
3. En déduire le volume total de la glace (*exprimé en litre*) que mangera l'enfant.

### Exercice 5 (03 points)




Un solide (*figure ci-contre*) est constitué d'un cylindre d'axe $OZ$ et de rayon $R$ dont l'extrémité inférieure est coupée à partir de $z=-h$ par le plan d'équation :

$$\frac{H-h}{2R}y-z=\frac{H+h}{2}$$

Calculer le volume $V$ de ce solide.

*Bon courage*

# ~ Corrigé détaillé Examen final ~
## Matière: Compléments Mathématiques 2

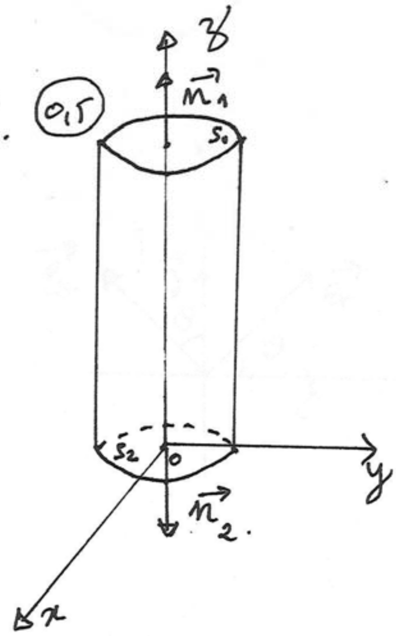
Exercice 1: 3 points

. calcul du flux du champ vectoriel : $\vec{V} = 2x\vec{i} - (z-1)\vec{k}$.

* A travers la base supérieure $S_1$ :

la base supérieure a pour équation

$z = 1$. $\quad d\vec{S_1} = dS.\vec{n_1}$ avec $\vec{n_1} = \vec{k}$. (0,5)




$$\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{V}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{V}.\vec{k}\, dS \quad (0,5)$$

$$\phi_1 = \iint_{S_1} (-z+1).dS = 0 \quad (0,5)$$

ou bien nous avons $\vec{V} = 2x\vec{i}$

$(z = 1)$ puisque $\vec{V} \perp \vec{k}$.

Donc $\phi_1 = 0$.

* A travers la base inférieure $S_2$ :

$S_2$ a pour équation $z = 0$.

$d\vec{S_2} = dS.\vec{n_2} \qquad \vec{n_2} = -\vec{k}$. (0,5)

$$\phi_2 = \iint_{S_2} -(-z+1)\, dS = -\iint_{S_2} dS = -\pi R^2. \quad (0,5)$$

Avec $R = 2$ donc $\phi_2 = -4\pi$. (0,5)

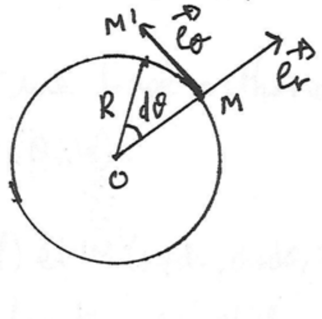
ou bien : $\vec{V} = 2x\vec{i} + \vec{k}$.

$-\vec{V}.\vec{k} = -1$.

$$\phi_2 = -\iint_{S_2} dS_2 = -\pi R^2.$$

Exercice 2 : 3 points :

1) * Expression du déplacement $d\vec{r}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ :



$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} \\ \overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}\end{aligned}\right) \quad 0{,}5$$

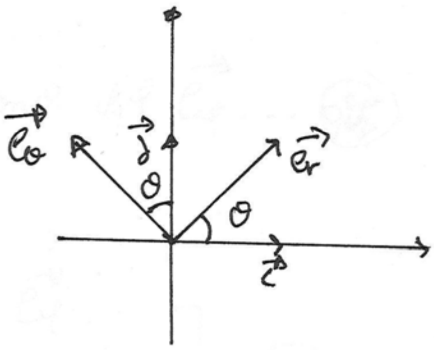
M' très voisin de M :

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{e_r}$$

$$\overrightarrow{MM'} = d(R \cdot \vec{e_r})$$

$$\overrightarrow{MM'} = \cancel{dR} \cdot \vec{e_r} + R \cdot d\vec{e_r}$$



$$d\vec{e_r} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \, d\theta$$

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\theta \, \vec{i} + \sin\theta \, \vec{j} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta \, \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta} \iff d\vec{e_r} = \vec{e_\theta} \, d\theta.$$

$$\overrightarrow{MM'} = R \, d\theta \, \vec{e_\theta}. \quad 0{,}5$$

2) * Circulation des champs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le long du cercle "C" :

$0{,}5$ $\quad d\mathcal{C} = \vec{v} \cdot d\vec{r}$. $\qquad d\vec{r} = R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$ $\quad 0{,}5$

$\vec{r} = R \cdot \vec{e_r}$.

$$\mathcal{C}_v = \int_{(C)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{puisque } \vec{r} \perp d\vec{r}. \quad 0{,}5$$

De même pour : $\vec{w} = \dfrac{\lambda}{r^3} \vec{r}$

$$\mathcal{C}_w = \int_{(C)} \vec{w} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \vec{r} \perp d\vec{r}$$

$0{,}5$

Exercice 3:

1) * L'expression de $\overrightarrow{grad} f$ dans la base locale $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$ associée aux coordonnées sphériques:

Les 3 vecteurs unitaires $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}$, forment une base orthonormée dans ce système de coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$.

Pour deux points très voisins $M(r, \theta, \varphi)$ et $M'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ le déplacement $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$ s'exprime en fonction $(r, \theta, \varphi)$ par la formule suivante:

$$\vec{dl} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi} \ldots \quad 0{,}25$$

$$df = \overrightarrow{grad} f \cdot \vec{dl}.$$

$$\overrightarrow{grad} f = X_r\vec{e_r} + X_\theta\vec{e_\theta} + X_\varphi\vec{e_\varphi}.$$

$$df = X_r\,dr + X_\theta\,r\,d\theta + X_\varphi\,r\sin\theta\,d\varphi \quad 0{,}5$$

or : $$df = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)d\varphi$$

Par identification
$$\begin{cases} X_r = \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ X_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ X_\varphi = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{cases} \quad 0{,}25$$

D'où $$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\vec{e_\varphi}$$

Suite Exercice 3 :

2) $$f(r,\theta,\varphi) = 3r^3 \sin^2\theta \cos\theta \sin 2\varphi.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = 9r^2 \sin^2\theta \cos\theta \sin 2\varphi \ldots\ldots\ldots \text{0,25} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3 (2\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta) \sin 2\varphi \ldots \text{0,25} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi} = 6r^3 \sin^2\theta \cos\theta \cos 2\varphi \ldots\ldots \text{0,25} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = (9r^2 \sin^2\theta \cos\theta \sin 2\varphi)\vec{e_r} + (3r^2 \sin 2\varphi (2\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta)\vec{e_\theta} + (6r^3 \sin\theta \cos\theta \cos 2\varphi)\vec{e_\varphi} \ldots \text{0,25}$$

$$g(M) = 2x - 1.$$

or : les coordonnées cartésiennes et sphériques sont reliées par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \ldots\ldots \text{0,25} \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \ldots\ldots \text{0,25} \\ z = r \cos\theta \ldots\ldots \text{0,25} \end{cases}$$

Donc la fonction g ~~dans la base~~ en coordonnées sphériques s'écrit :

$$g(r,\theta,\varphi) = 2r\sin\theta \cos\varphi - 1 \ldots\ldots \text{0,25}$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = 2\sin\theta \cos\varphi \ldots \text{0,25}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 2r\cos\theta \cos\varphi. \quad \text{0,25}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = -2r\sin\theta \sin\varphi \quad \text{0,25}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g = (2\sin\theta \cos\varphi)\vec{e_r} + (2\cos\theta \cos\varphi)\vec{e_\theta} - (2\sin\varphi)\vec{e_\varphi}$$

0,25

En cordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k} \ldots 0{,}25$$

En cordonnées cartésiennes.

$$f(x,y,z) = 6xyz \ldots 0{,}25$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6yz \ldots 0{,}25$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xz \ldots 0{,}25$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 6xy \ldots 0{,}25$$

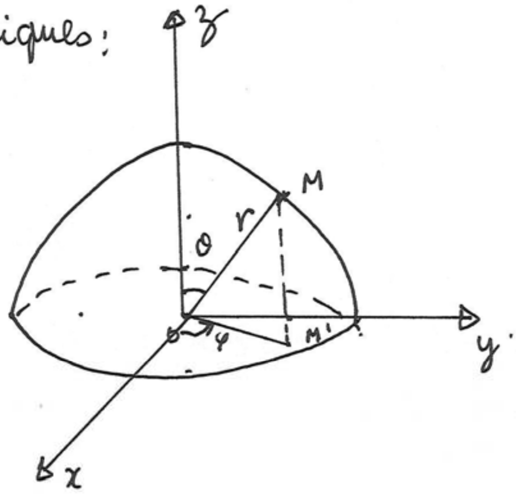
$$\overrightarrow{grad}\, f = 6yz\,\vec{i} + 6xz\,\vec{j} + 6xy\,\vec{k} \ldots 0{,}25$$

$$g(x,y,z) = 2x - 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 2. \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \\ \overrightarrow{grad}\, g = 2\,\vec{i}. \end{array}\right) 0{,}5$$

Exercice 4:

1) Calcul de $V_b$ en coordonnées sphériques:




En coordonnées sphériques:

$$dV = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr. \quad 0{,}5$$

le volume d'une sphère de rayon R:

$$V = \iiint r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr.$$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta.$$

$$V = 2\pi \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^R \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}. \quad 0{,}5$$

$$V = \frac{2\pi}{3} R^3 \cdot 2 = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Donc le volume de la demi-boule sphérique:

$$V_b = \frac{1}{2} V = \frac{2\pi}{3} R^3. \quad 0{,}25$$

En fonction de $h$ et $tg\alpha$ : $R = h\,tg\alpha$ $\quad V_b = \frac{2\pi}{3} h^3 \, tg^3\alpha$. $0{,}25$

ou bien en coordonnées polaires:

La demi-boule est située dans le demi-espace $z>0$. Elle représente la moitié d'une sphère : une sphère coupée par un plan // $(xoy)$ et passant par o.

$V_b$ est donc l'intégrale de $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ sur le domaine

$$\mathcal{D} = \{x, y \,/\, x^2 + y^2 \leq R^2\}. \quad 0{,}25$$

En coordonnées polaires: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$ $0{,}25$

$$V_b = \iint_{\mathcal{D}} z \, dx \, dy.$$

$$V_b = \iint \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$V_b = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\, d\rho$$

$$V_b = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\, d\rho\ .$$

on pose : $\rho^2 = u$ , $du = 2\rho\, d\rho$. 0,75

$$V_b = 2\pi \int_0^{R^2} \sqrt{R^2-u}\,\frac{du}{2}$$

$$V_b = \pi\left[-\frac{2}{3}\left(R^2-u\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R^2}$$

$$V_b = \frac{2\pi}{3} R^3.$$

En fonction de $h$ et $tg\,\alpha$ : $V_b = \frac{2\pi}{3} h^3 tg^3\alpha$ 0,25

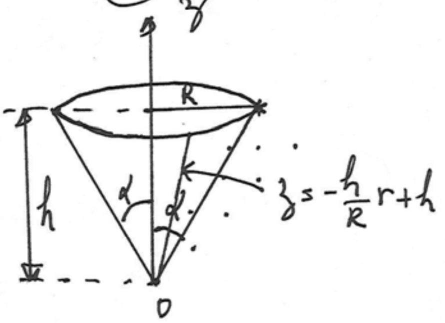
2) * Calcul de $V_C$ :

Le cornet est sous forme conique : nous utilisons les coordonnées cylindriques ou sphériques.

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$ 0,5 ; $dv = r\,dr\,d\theta$ ... 0,25

$z = -\frac{h}{R}r + h$ .... 0,5




$$V_c = \iiint r\, d\theta\, dr\, dz\ .$$

$$V_c = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(\int_0^{z=-\frac{h}{R}r+h} dz\right) r\,dr$$

0,5

$$V_c = 2\pi \int_0^R \left(-\frac{h}{R}r^2 + h\,r\right) dr$$

$$V_c = \frac{\pi h}{3} R^2. \quad ; \quad R = h\, tg\alpha.$$

0,75

En fonction $h$ et $tg\alpha$ $V_c = \frac{\pi}{3} h^3 tg^2\alpha$ ---> 0,25

Application numérique:

3) Quantité de glace exprimée en litre:

$$V_T = V_b + V_c = h^3 \frac{\pi}{3}\left(2\,tg^3\alpha + tg^2\alpha\right) \ldots (0{,}25)$$

$h = 11$ cm

$\alpha = 15^\circ$

$1\,\ell = 10^3\ cm^3$.

$$V_T \simeq 0{,}15\ \ell. \ \ldots (0{,}5)$$

Exercice 5: calcul du volume V:

Nous avons: $\frac{H-h}{2R}y - z = \frac{H+h}{2}$.

$$z = \frac{H-h}{2R}y - \frac{h+H}{2}.$$

En coordonnées cylindriques: $dV = r\,dr\,d\theta\,dz \ldots (0{,}5)$

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{z=\frac{H-h}{2R}y - \frac{H+h}{2}}^{0} r\,dr\,d\theta\,dz \ldots\ldots (0{,}5)$$

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta \int_{z=\frac{H-h}{2R}y - \frac{H+h}{2}}^{0} dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(-\frac{H-h}{2R}y + \frac{H+h}{2}\right) r\,dr\,d\theta$$

$y = r\sin\theta$.

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(-\frac{H-h}{2R}r^2\sin\theta + \frac{H+h}{2}r\right) dr\,d\theta \ldots\ldots (1)$$

$$V = -\frac{H-h}{2R}\int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi}\sin\theta + \frac{H+h}{2}\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \ldots$$

$$= -\frac{H-h}{2R}\left[\frac{R^3}{3}\right]\left[\cos\theta\right]_0^{2\pi} + \frac{H+h}{2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R \cdot [2\pi]$$

$$V = \frac{H+h}{2}\pi R^2 \ldots (1)$$