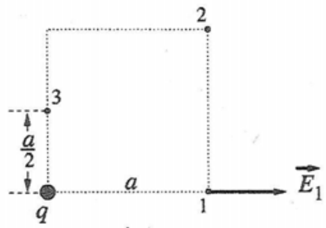
— Examen de Phys 2 —

15 juin 2011 — 08h30 - 10h30

Exercice 1: (*2.5 points*) Une charge ponctuelle q se trouve sur un sommet d'un carré de côté a. Elle crée au point 1 le champ $\vec{E}_1$ (voir figure).



1) Quel est le signe de q? Justifier.

2) Exprimer les modules puis représenter les champs $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ créés par q aux points 2 et 3. Prendre 1 cm (2 carreaux) pour la longueur de $\vec{E}_1$ et respecter les modules $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ par rapport à celui de $\vec{E}_1$.

Exercice 2: (*4.5 points*) Une sphère isolée conductrice de rayon R et portant une charge Q se trouve dans un état d'équilibre électrostatique.

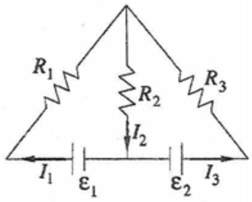
a) Calculer le potentiel au centre de la sphère.

b) Quel est le potentiel à la surface de la sphère?

c) Montrer qu'à l'extérieur de la sphère le potentiel V_e s'écrit : $V_e = kQ/r$ $(r > R)$. On prendra $V_e(r = \infty) = 0$. On calculera d'abord le champ à l'aide du théorème de Gauss puis on déduira le potentiel.

d) Si le potentiel à la surface est de 320 V et qu' à l'extérieur, à 15 cm de la surface, il vaut 220 V, déterminer R et Q.

Exercice 3: (*4 points*) Les résistances de la figure ci-contre ont pour valeur : $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 50\,\Omega$ et $R_3 = 20\,\Omega$. Les forces électromotrices valent : $\varepsilon_1 = 1.6\,\text{V}$ et $\varepsilon_2 = 6.3\,\text{V}$. Calculer les courants I_1, I_2 et I_3 et préciser leur sens réel de circulation par rapport à celui indiqué sur la figure.



Exercice 4: (*2 points*) Un courant de 3.2 A circule à travers un fil conducteur. Combien d'électrons traversent une section droite du fil en 1 seconde? On rappelle que la charge de l'électron vaut (en valeur absolue) 1.6×10^{-19} C.

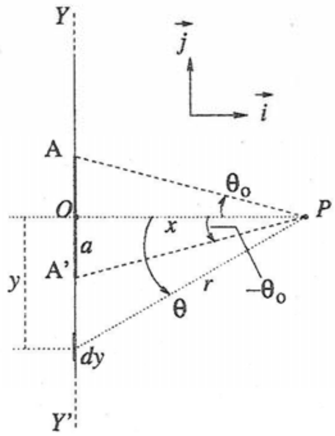
Exercice 5: (*7 points*) La figure ci-contre représente un fil rectiligne infini disposé le long de l'axe $Y'OY$. Il est constitué d'un segment AA' $(OA = OA')$ portant une densité de charge uniforme λ_1 et de deux fils semi-infinis AY et $A'Y'$ portant tous les deux la même densité uniforme λ_2, $(\lambda_2 \neq \lambda_1)$.

a) Peut-on utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique créé par le fil en un point quelconque de l'espace qui l'entoure? Si oui, faire le calcul; sinon, expliquer pourquoi?

b) Peut-on utiliser le théorème de Gauss pour évaluer le flux du champ électrique créé par le fil à travers une surface fermée quelconque? Si oui, que vaut le flux à travers la sphère de centre A et de rayon $R = AO$? Sinon, pourquoi?

c) Déterminer le champ $\vec{E}$ créé en un point P de l'axe médiateur du fil ($||\vec{OP}|| = x$). On exprimera $\vec{E}$ dans la base $(\vec{i},\ \vec{j})$ et on utilisera l'angle orienté θ, repérant un élément dy du fil, comme variable d'intégration. Le segment $A'A$ est délimité par les angles $-\theta_0$ et θ_0 (voir figure).

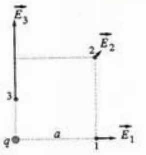
d) Vérifier qu'on retrouve le résultat du fil infini uniformément chargé dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.



— FIN — *Durée : 2 heures*

— Bonne chance

—— Examen de Phys 2 : Solution ——



Exercice 1 (*2.5 points*)**:** 1) La charge q est positive car le champ qu'elle crée la fuit (son sens va de q au point considéré). 2) $E_2 = kq/2a^2 = E_1/2$ et $E_3 = kq/(a/2)^2 = 4kq/a^2 = 4E_1$, voir figure.

Exercice 2: (*4.5 points*) a) On sait qu'à l'équilibre électrostatique, la charge Q se distribue à la surface avec une densité uniforme $\sigma = Q/S$, S étant la surface de la sphère (σ uniforme car la surface est régulière, elle a la même courbure partout). Le potentiel au centre de la sphère est :

$$V = \int_S \frac{k\sigma dS}{R} = \frac{k\sigma S}{R} = \frac{kQ}{R}.$$

b) On sait aussi qu'à l'équilibre électrostatique, la sphère constitue un volume équipotentiel, i.e. tous les points de la sphère sont au même potentiel. Le potentiel à la surface est le même que le potentiel au centre et vaut $V = kQ/R$.

c) Pour calculer V_e, le plus simple est de calculer d'abord le champ à l'aide du théorème de Gauss et utiliser ensuite $dV_e = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$. Par raison de symétrie, le champ créé en r est radial et garde un module constant pour tous les points situé à la même distance r. Le Théorème de Gauss, appliqué avec une surface fermée sphérique S_G de rayon r, donne :

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_G} E\, dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E = kQ/r^2$$

$dV_e = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -Edr \Longrightarrow V_e = \int -E\, dr = \int -kQ/r^2\, dr = kQ/r + cste$. De $V_e(r = \infty) = 0$ on tire $cste = 0$ et $\rightarrow V_e = kQ/r$.

d) À la surface on a : $V_s = kQ/R$. À 15 cm de la surface $r = R + 0.15$ et $V_{15} = kQ/(R + 0.15)$. Des 2 équations on tire (avec $V_s = 320$ V et $V_{15} = 220$ V) : $R = 0.33$ m et $Q = 11.7$ nC.

Exercice 3 : (*3.5 points*) Lois des mailles et des noeuds donnent:

i) $R_1 I_1 + R_2 I_2 - \varepsilon_1 = 0$, ii) $R_3 I_3 + R_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$ et iii) $I_2 = I_1 + I_3$

Des trois équations on tire : $I_1 = -84.7$ mA, $I_2 = 65.8$ mA et $I_3 = 150.5$ mA. Le signe $-$ de I_1 signifie qu'il circule dans le sens contraire à celui indiqué sur la figure. I_2 et I_3, étant positifs, circulent dans le sens indiqué.

Exercice 4 : (*2 points*) Le courant est par définition la charge qui traverse une section droite d'un conducteur par unité de temps : $I = dQ/dt \Longrightarrow \Delta Q = I\Delta t$. Pour $\Delta t = 1$ s, un courant de 3.2A est donc équivalent à une charge $\Delta Q = 3.2\text{A} \times 1\text{s} = 3.2\text{C}$. Sachant que la charge de l'électron vaut (en valeur absolue) $e = 1.6 \times 10^{-19}$C, le nombre d'électrons est $3.2\,/(1.6 \times 10^{-19}) = 2 \times 10^{19}$ électrons.

Exercice 5 : (*7.5 points*) a) (**1.5 pt**) Le théorème de Gauss s'écrit : $\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{intérieure}}/\epsilon_0$. Le calcul de $\vec{E}$ à partir de l'équation précédente dépend de la possibilité de trouver une surface fermée (S_G) qui permet d'extraire $\vec{E}$ (ou plutôt E) de l'intégrale.

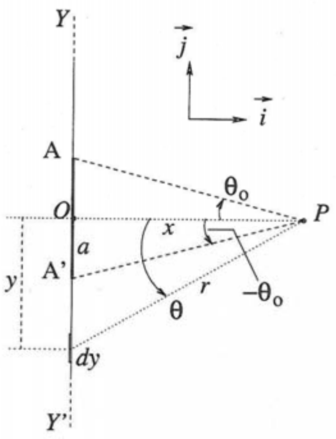
On peut naturellement penser au cas du fil rectiligne infini uniformément chargé. Ce cas a été traité en cours où on a pu utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ autour du fil. La surface S_G est dans ce cas un cylindre. Le champ $\vec{E}$ est parallèle à $d\vec{S}$ en tout point de la surface latérale où il garde (par raison de symétrie) un module constant et $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ sur les 2 surfaces de base. Le calcul de $\vec{E}$ est alors immédiat car il est possible de sortir E de l'intégrale.

Dans le cas présent, le théorème de Gauss ne peut pas s'appliquer pour calculer le champ car on ne peut pas trouver de surface de Gauss qui permet d'extraire $\vec{E}$ de l'intégrale.

b) (**0.5 pt**) Flux $= \oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q_{\text{intérieure à } S_G}/\epsilon_0$. Il est donc possible d'évaluer, à l'aide théorème de Gauss, le flux du champ électrique à travers n'importe quelle surface fermée S_G si on connaît la charge intérieure. La sphère de centre A et de rayon $R = AO$ contient la charge du morceau de fil qu'elle renferme, soit $R\lambda_1 + R\lambda_2$. Le flux à travers la sphère vaut donc : $R(\lambda_1 + \lambda_2)/\varepsilon_0$.

c) (**5 pts**) Si dy est un élément du fil, repéré par θ (voir figure), il porte la charge dq ($dq = \lambda_1 dy$ ou $\lambda_2 dy$, selon que dy se situe sur AA' ou sur $(AY, A'Y')$ et crée en P le champ élémentaire

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{k\,dq}{r^2}(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j}),$$



où $\vec{r}$ est le vecteur allant de dy à P. On peut remarquer que la disribution de la charge présente une symétrie par rapport à OP. Les arguments de symétrie développés en cours dans le cas du fil rectiligne infini chargé uniformément s'appliquent ici et conduisent à un champ électrique total porté par OP; autrement dit $\vec{E} = E\vec{i}$. E s'obtient en intégrant la composante de $d\vec{E}$ suivant OP, soit :

$$E = \int_{\text{fil}} \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \int_{\text{A'A}} k\frac{\lambda_1\,dy}{r^2}\cos\theta + \int_{\text{Y'A'+AY}} k\frac{\lambda_2\,dy}{r^2}\cos\theta$$

Pour effectuer l'intégration, on exprime tout en fonction de θ.

$\tan\theta = y/x \longrightarrow dy = xd\theta/\cos^2\theta$; $r\cos\theta = x \longrightarrow r^2 = x^2/cos^2\theta \longrightarrow dy/r^2 = d\theta/x$ et

$$\begin{aligned} E &= k\frac{\lambda_2}{x}\int_{-\pi/2}^{-\theta_0}\cos\theta\,d\theta + k\frac{\lambda_2}{x}\int_{\theta_0}^{+\pi/2}\cos\theta\,d\theta + k\frac{\lambda_1}{x}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{2k\lambda_2}{x}(1-\sin\theta_0) + \frac{2k\lambda_1}{x}\sin\theta_0. \end{aligned}$$

d) (**0,5 pt**) Dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, on a :

$$E = \frac{2k\lambda}{x}(1-\sin\theta_0+\sin\theta_0) = \frac{2k\lambda}{x}$$

On retrouve, comme on pouvait s'y attendre, le résultat du fil infini uniformément chargé.