Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
$1^{\text{ère}}$année S.M.

2010/2011

Examen Maths II

Exercice 1. *On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :*

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \cos^2 x - \sin^2 x .... (1)$$

1) Résoudre l'équation homogène associée à (1)
2) Donner la solution particulière de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} ...(2)$$

3) Donner la solution particulière de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = \cos 2x ...(3)$$

4) Donner la solution particulière de (1).
5) Donner la solution générale de (1).

Exercice 2. *Soient A et B deux matrices d'ordre $(3,4)$ et $(4,3)$ réspectivement définies par*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

1) Donner la matrice $D = A.B$, puis donner D^{-1}.

2) On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha+2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$,

2.1) Calculer le déterminant de C.
2.2) Soit $P(\alpha) = \alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha - 16$. Calculer $P(2)$.
2.3) Pour quelles valeurs de α, C est inversible.
3.3) On considère le système d'équations linéaires

$$(S) : \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha+2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre le système (S) suivant les valeurs de α.

Exercice 3. *Soit f une fonction définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

1) Calculer $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

2) Résoudre l'équation différentielle

$$y' - y = -\frac{e^x}{x(x^2-1)}$$

Corrigé de l'Examen de Maths 2

Exo n°1 : (6 points)

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + \cos^2 x - \sin^2 x \quad (1)$$
$$= xe^{2x} + \cos 2x.$$

1) Résolution de l'equation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$

L'eq caracteristique : $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow r_1 = 1$ et $r_2 = 2$

Donc $\boxed{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} \; , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$ est la sol générale de l'eq homogène (1)

2) Solution particulière de l'eq : $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} \ldots (2)$

le second membre est xe^{2x} avec 2 racine de l'equation caracteristique alors,

$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x} \Rightarrow y_p' = \left(2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c\right)e^{2x}$

et $y_p'' = (4ax^2 + (8a+4b)x + (2a+4b+4c)) e^{2x}$ (2)

En remplaçant, y_p, y_p' et y_p'' dans (2) on trouve

$a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c \in \mathbb{R}$.

Pour $c = 0$ $y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x}$ est une sol particulière

3) Solution particulière $y'' - 3y' + 2y = \cos 2x$

$2i$ n'est pas racine de l'equ caracteristique

Donc $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x \quad A, B$ cst.

$$y_p' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$

$$y_p'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

On remplace dans l'equation (3) et on trouve

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 6A\sin 2x - 6B\cos 2x$$
$$+ 2A\cos 2x + 2B\sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow (-2A - 6B)\cos 2x + (-2B + 6A)\sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A - 6B = 1 & \Rightarrow -2A = 6B + 1 \\ \text{et} & \\ -2B + 6A = 0 & \Rightarrow -2B - 3(6B+1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow -20B = 3 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{3}{20}}$$

$$-2A = 6B + 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}(6B+1) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{18}{20} + 1\right)$$

$$A = \frac{9}{20} - \frac{1}{2} = \frac{9-10}{20} = -\frac{1}{20} \quad \boxed{A = -\frac{1}{20}}$$

Donc $\boxed{y_p = -\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x}$ est une sol particulière de (3)

1) Donc la solution particulière de (1) est

$$\boxed{y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x} - \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x} \quad (0,5)$$

5) La solution generale de (1) est :

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x} - \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\sin 2x}$$

Exo n°2 (9,5 points) (0,5)

$$)= A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

Calcul de D^{-1}

$$\det D = -6\begin{vmatrix} 5 & \frac{3}{2} \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -\frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} = \frac{39}{4} \quad (0,5)$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D}\,{}^{t}C_D$$

$$C_D = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & \frac{3}{2} \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 7 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -\frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 7 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{55}{4} & -\frac{31}{2} \\ -\frac{13}{2} & \frac{35}{2} & -\frac{43}{2} \\ -\frac{13}{2} & 16 & -23 \end{pmatrix}$$

alors ${}^{t}C_D = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} \\ \frac{55}{4} & \frac{35}{2} & 16 \\ -\frac{31}{2} & -\frac{43}{2} & -23 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{55}{39} & \frac{70}{39} & \frac{64}{39} \\ \frac{-62}{39} & \frac{-89}{39} & \frac{-92}{39} \end{pmatrix}$ (1)

2) $C = \begin{pmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha+2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$

2.1) $\det C = (\alpha+2) \begin{vmatrix} 2\alpha+2 & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 2\alpha+2 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(\alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 16)$ (1 pt)

2.2) $P(\alpha) = \alpha^3 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 16$; $p(2) = 0$

2.3) les valeurs de α pour que C soit inversible

C est inversible $\Leftrightarrow$ $\det C \neq 0$

$\det C = 0 \Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(a\alpha^2 + b\alpha + d) = 0$

Par identification ou division Euclidienne on trouve

$P(\alpha) = (\alpha-2)(\alpha^2 + 6\alpha + 8) = (\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)$ (1,25

Donc $p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ ou $\alpha = -4$

Par consequent, C est inversible si $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, -4, -2\}$

2.4 Resolution du système (S): $CX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1er cas si $\det C \neq 0$ alors le système est de Cramer

$$x = \frac{\Delta_1}{\det C} \; ; \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2\alpha+2 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

$$\boxed{x = \frac{2\alpha^2 + 3\alpha - 2}{2(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\det C} \; ; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 - 13\alpha$$

$$\boxed{y = \frac{-\alpha^2 - 13\alpha}{2(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}}$$

(2 pts)

$$z = \frac{\Delta_3}{\det C} \; ; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha+2 & 1 & 1 \\ 12 & 2\alpha+2 & -1 \\ \alpha & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 - \alpha + 28$$

$$\boxed{z = \frac{-2\alpha^2 - \alpha + 28}{2(\alpha-2)(\alpha+2)(\alpha+4)}}$$

2ème cas : si $\alpha = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 12 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det C = 0 \Rightarrow Rg\, S \leq 2$

soit $M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M_1 = 12 \neq 0 \Rightarrow Rg\, S = 2$

(1)

le determinant caracteristique $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 12 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ le système (S) n'admet pas de solutions.

- si $\alpha = -2$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 12 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow Rg\, S = 2$ (1)

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 12 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow$ (S) n'admet pas de solution.

- si $\alpha = -4$ $\quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 12 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

$\Rightarrow Rg\, S = 2$ (1)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow$ (S) n'admet pas de solution.

Exo n°3 (5 points)

$f(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)} \qquad x \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

1) $\int f(x)\,dx$

$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = a + x\left(\frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}\right)$$ au pt $x = 0$ on trouve $\boxed{a = 1}$

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{(1+x)}{x} + \frac{b(1+x)}{1-x} + c$$ au pt $x = -1 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1-x}{x} + b + \frac{c(1-x)}{1+x}$$ au pt $x = 1 \Rightarrow \boxed{b = +\frac{1}{2}}$

Donc $\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{1}{2(1-x)}\,dx - \int \frac{1}{2(1+x)}\,dx$

$$= \mathrm{Ln}|x| - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|1-x| - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|1+x| + C\ ;\ C\in\mathbb{R}$$

$$= \mathrm{Ln}\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + C \qquad (2pts)$$

2) Resolution de $y' - y = -\dfrac{e^x}{x(x^2-1)}$ (I)

$y' - y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = dx \Rightarrow \mathrm{Ln}|y| = x + C$

$$\Rightarrow \boxed{y = k e^x,\ k \text{ cste}} \qquad (1pt)$$

M.V.C $\quad y_p = k(x)\,e^x \Rightarrow y_p' = k'(x)\,e^x + k(x)\,e^x$

En remplaçant ds (I), on trouve $k'(x) = \dfrac{1}{x(1-x^2)}$ (1pt)

$\Rightarrow K(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \mathrm{Ln}\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + C$ (0,5)

$\Rightarrow y_p = e^x\,\mathrm{Ln}\left(\dfrac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right)$ (0,5)

Finalement la solution générale de (I) est

$$\boxed{y = k e^x + e^x\,\mathrm{Ln}\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right)} \qquad (0,5)$$