26-05-2008 جامعة منتوري، قسنطينة

$1^h 30mn$ ST_2 ، MATH 5 امتحان

تمرين 1: عين ميدان تقارب السلسلة التالية (2,5)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin i n}{z^n}$$

تمرين 2: لتكن الدالة f المعرفة كمايلي: (6,75)

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

- اكتب f على الشكل $U+iV$ حيث U، V دالتان حقيقيتان.

- هل f دالة تحليلية على ميدان D (يطلب تعيينه).

تمرين 3: لتكن الدالة f حيث: (10,75)

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z^2-1}.$$

1- عين النقاط الشاذة وحدد نوعيتها.

2- احسب $\oint_C f(z)\,dz$ حيث: $C: |z-1| = \frac{1}{2}$ ، $C: |z-3| = 1$

3- استنتج $\operatorname{Res} f(1)$ (دون حساب).

4- احسب $\operatorname{Res} f(z)$ في النقاط الشاذة الأخرى واستنتج:

$\oint_C f(z)\,dz$ حيث $C: |z| = 2$

ST_2 جامعة منتوري ، قسنطينة

MATH 5 تصحيح امتحان

تمرين 1: 2.5 نقاط

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin i n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

الجزء الصحيح الجزء الأساسي

$$* R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} \cdot \frac{2^{n+1}[(n+1)!]^2}{(-1)^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2(n+1)^2}{-1} \right| = \lim_{n\to\infty} |2(n+1)^2| = \lim_{n\to\infty} [2(n+1)^2] = +\infty$$

ومنه 1 $\boxed{R = +\infty}$

$$* \rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sin i n|}$$

$$\sin i n = \frac{e^{-n} - e^{n}}{2i} = \frac{e^n(e^{-2n} - 1)}{2i}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left[\left| e^n \left(\frac{e^{-2n} - 1}{2i}\right) \right| \right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left[e \left(\frac{e^{-2n} - 1}{2i}\right)^{1/n} \right] = e$$

ومنه 1 $\boxed{\rho = e}$

بما أن $\rho < R$ إذن ميدان تقارب هذه السلسلة هي الحلقة

0,5 $\boxed{e < |z| < +\infty}$

تمرين 2: 6,75

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

0,25 f معرفة على $D=\mathbb{C}-\{0\}$

نضع $z=x+iy$ إذن:

$$f(z)=f(x+iy)=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{1}{x+iy}\right)=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(x+iy)(x^2+y^2)+x-iy}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3+xy^2+x+i(x^2y+y^3-y)}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}+i\,\frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}\right)$$

ومنه:

$$\boxed{U(x,y)=\frac{x^3+xy^2+x}{2(x^2+y^2)}}\ ,\quad \boxed{V(x,y)=\frac{x^2y+y^3-y}{2(x^2+y^2)}}.$$ 2

إذن

$$f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$$

f تحليلية على D $\Leftrightarrow$ U, V قابلتان للاشتقاق على D وتحققان معادلتي كوشي- ريمان.

$D=\mathbb{C}-\{0\}$. واضح أن U, V قابلتان للاشتقاق على D. (كثيرات حدود).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial U}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}\end{cases}\qquad ?$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(3x^2+y^2+1)(2x^2+2y^2) - 4x(x^3+xy^2+x)}{(2x^2+2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4+2x^2y^2+y^4+y^2-x^2}{2(x^2+y^2)^2} \quad \cdots \text{①} \qquad 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(x^2+3y^2-1)(2x^2+2y^2) - 4y(x^2y+y^3-y)}{(2x^2+2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^4+y^4+2x^2y^2+y^2-x^2}{2(x^2+y^2)^2} \quad \cdots \text{②} \qquad 1$$

نلاحظ أن ① = ② ومنه $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy(2x^2+2y^2) - 4y(x^3+xy^2+x)}{4(x^2+y^2)^2} = \frac{-yx}{(x^2+y^2)^2} \quad \cdots \text{③} \qquad 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy(2x^2+2y^2) - 4x(x^2y+y^3-y)}{4(x^2+y^2)^2} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \cdots \text{④} \qquad 1$$

نلاحظ أن ③ = -④ $\Leftarrow$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

أي أن u ، v تحققان معادلتي كوشي - ريمان إذن f تحليلية على $D = \mathbb{C} - \{0\}$.

0,5

تمرين 3: (10,75)

$$f(z) = \frac{e^{-1/z}}{z^2-1} = \frac{e^{-1/z}}{(z-1)(z+1)}$$

f تحليلية في $\mathbb{C}-\{0,1,-1\}$ ، (0,5)

النقاط الشاذة هي $z=0$ ، $z=1$ ، $z=-1$

نوعيتها:

* $z=0$. $\lim\limits_{z\to 0} f(z) \nexists$ (غير موجودة)

اذن $z=0$ ن.ش.م وهي نقطة أساسية. (0,5)

* $z=1$ ، $\lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{e^{-1/z}}{z+1} = \frac{e^{-1}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array}\right.$

اذن $z=1$ هو قطب بسيط. (0,5)

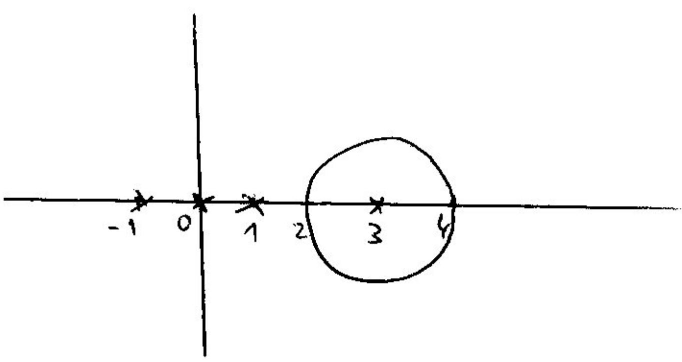
* $z=-1$: $\lim\limits_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim\limits_{z\to -1} \frac{e^{-1/z}}{z-1} = \frac{e}{-2} \left\{ \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array}\right.$

اذن $z=-1$ هو قطب بسيط. (0,5)

(ملاحظة: يمكن حساب $\lim\limits_{z\to \pm 1} f(z) = \infty$)

2. حساب $\oint_C f(z)\,dz$

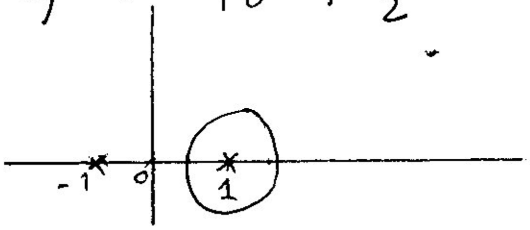
1) $C: |z-3| = 1$



نلاحظ أن $z=0$ $z=1$ $z=-1$ كلها تقع خارج القرص، أي f تحليلية داخل وعلى القرص $|z-3|<1$ وذلك حسب كوشي فإن

(0,5) $\oint_C f(z)\,dz = 0$

2) $C: |z-1| = \frac{1}{2}$



$z=0$ ، $z=-1$ تقعان خارج الدائرة.
f تحليلية داخل القرص $|z-1|<1/2$
ما عدا عند $z=1$ إذن حسب
قاعدة تكامل كوشي نجد:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{\frac{e^{-1/z}}{z+1}}{z-1}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\,g(z_0)$$

حيث $n=1$ ، $z_0=1$ ، $g(z)=\frac{e^{-1/z}}{z+1}$ إذن $g(1)=\frac{e^{-1}}{2}=\frac{1}{2e}$

ومنه: 1

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{\frac{e^{-1/z}}{z+1}}{z-1}\,dz = \boxed{2\pi i\,\frac{1}{2e}} = \boxed{\frac{i\pi}{e}} \cdots (1)$$ 0,5

استنتاج $\mathrm{Res}\,f(1)$؟.
بما أن حسب النظرية الأساسية للبواقي نجد:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,f(1) \cdots (2)$$

بالمطابقة بين (1) ، (2) نستنتج أن

$$\boxed{\mathrm{Res}\,f(1) = \frac{1}{2e}}$$ 0,5

4) $\mathrm{Res}\,f(-1) = ?$

$$\mathrm{Res}\,f(-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{e^{-1/z}}{z-1} = \boxed{-\frac{e}{2}}$$ 0,5

ج) $\mathrm{Res}\,f(0)=?$ يجب نشر f في سلسلة Laurent في
جوار الصفر لأن $z=0$ ن.ش.م أساسية. 0,5

$$f(z) = e^{-1/z}\left[\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right] = e^{-1/z}\left[\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}\right]$$ 0,5

نجد : $A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$ 0,5

$$f(z) = e^{-1/z}\left[\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)}\right]$$

لدينا:

$$e^{-1/z} = e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots \qquad u = -1/z$$

$$e^{-1/z} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{5!z^5} + \cdots$$ 0,5

$$\frac{1}{2(z-1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\frac{1}{2}\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\right) \quad (|z|<1)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} - \frac{z^4}{2} - \cdots$$ 0,5

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n(-1)^n = \frac{1}{2}\left(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots\right) \quad (|z|<1)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{2} - \cdots$$ 0,5

$$\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} - \frac{z^4}{2} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{2} - \cdots\right)$$

$$= -1 - z^2 - z^4 - z^6 - \cdots$$

$$f(z) = \left(-1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} - \frac{1}{4!z^4} + \cdots\right) + \left(-z^2 + z - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} - \frac{1}{4!z^2} + \cdots\right)$$

$$+ \left(-z^4 + z^3 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!z} - \cdots\right) + \cdots$$ 0,5

$$f(z) = \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)\frac{1}{z} + \cdots$$

$\left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots\right)$ هو $\frac{1}{z}$ معامل اذن

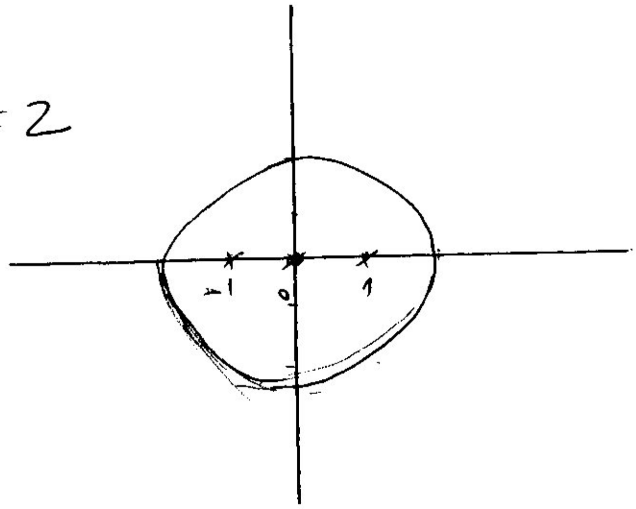
0,75

أي :

$$\operatorname{Res} f(0) = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}}$$

$$\oint_C f(z)\,dz \quad ; \quad C : |z| = 2$$



$z=0$ ، $z=1$ ، $z=-1$ تقع كلها داخل القرص $|z|<2$

f تحليلية داخل القرص $|z|<2$ ما عدا عند $z=0$ ، $z=1$ ، $z=-1$ إذن حسب النظرية الأساسية للبواقي نجد :

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1) + \operatorname{Res} f(-1) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{2e} - \frac{e}{2} \right)$$

1,5