جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

الجذع المشترك LMD
ST $_{1,A}$
2010/02/01

الامتحان طويل المدى الأول في مادة الرياضيات I

التمرين الأول (07.5 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

1- عين مجموعة التعريف D_f.
2- أوجد نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
3- عين الدالة g تمديد f بالاستمرار على IR.
4- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على IR.
5- أحسب g'.

التمرين الثاني (09 نقاط)

لتكن

$$f : IR^3 \to IR^3$$
$$f(x,y,z)=(x-y+z,-x+y-z,\ x-y+z)$$

1- عين $\ker f$ ثم استنتج $\dim \ker f$.
2- عين أساس لـ $\mathrm{Im}\, f$.
3- هل f تقابلي؟
4- ليكن $V=\{(x,y,z)\in IR^3 \,/\, x+y-z=0\}$
أ- بين أن V ف.ش.ج من IR^3.
ب- عين أساس لـ $f(V)$ ثم استنتج $\dim f(V)$.

التمرين الثالث (06.5 نقاط)

نعرف على $E=]-1,1[$ العملية الداخلية $*$ كما يلي $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1- بين أن $(E,*)$ زمرة تبديلية.
2- حل في E المعادلتين التاليتين

$$(a)\quad x*x=\frac{1}{2}$$

$$(b)\quad x*2x=-\frac{1}{2}$$

بالتوفيق للجميع

جامعة منتوري قسنطينة
الجذع المشترك LMD – STB

01 فيفري 2010
المدة : ساعة و نصف

امتحان طويل المدى في مقياس الرياضيات 1

التمرين الأول (8 نقاط)

أ) ليكن التابع f المعرف بالشكل التالي $f : x \to f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 \ln(x+2)}$

1) عين D_f مجموعة تعريف التابع f .

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x)$.

ب) نعرف التابع g بالشكل التالي

$$g : x \to g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D_f \\ -1 & , x = -1 \\ 0 & , x = -2 \end{cases}$$

1) عين D_g مجموعة تعريف التابع g .

2) أدرس استمرار التابع g عند النقطتين $x_0 = -1$ و $x_1 = -2$.

3) أدرس اشتقاق التابع g عند النقطة $x_0 = -1$.

4) أعطي نشر *ماك لوران* (إن وجد) للتابع g حتى الدرجة الثالثة.

التمرين الثاني (7 نقاط)

ليكن التطبيق الخطي f المعرف من IR^2 نحو IC بالشكل $f(x,y) = x - 2y + 3\,i\,y$

1) عين $\ker f$ ثم $\dim \ker f$.

2) استنتج $\dim \operatorname{Im} f$.

3) هل التطبيق الخطي f غامر؟

4) أوجد المصفوفة A المرافقة لـ f وفق الأساسين النظاميين.

5) أحسب $A(2A+I)$ حيث I هي المصفوفة الحيادية ذات الدرجة 2.

التمرين الثالث (5 نقاط)

1) أدرس الخاصية ضد التناظرية للعلاقة T المعرفة على IR بالشكل التالي

$\forall x, y \in IR : x T y \Leftrightarrow x^3 - y^3 \geq 0$

2) أدرس الخاصية التجميعية للعملية $\otimes$ المعرفة على مجموعة الأعداد المركبة IC بالشكل التالي

$\forall (z_1, z_2) \in IC^2 : z_1 \otimes z_2 = z_1 + i|z_2|$

بالتوفيق

الجذع المشترك LMD
ST $_{1, A}$

جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

تصحيح الامتحان طويل المدى الأول في مادة الرياضيات I

التمرين الأول (07.5 نقاط)

$$f(x)=x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

-1

$D_f=\{x\in IR/x\neq 0\}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ 1ن

-2

$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2\ \sin\frac{1}{x}=0$ (لأن $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$ و $\lim_{x\to 0} x^2=0$) 0.25+0.5 ن

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} x^2\ \sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to +\infty} x\ \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=+\infty$ 0.25+0.5 ن

لأن $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1=\lim_{t\to 0^-}\frac{\sin t}{t}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} x^2\ \sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to -\infty} x\ \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-\infty$ 0.25+0.5 ن

-3 $g(x)=\begin{cases} f(x)\ , & x\in D_f \\ 0\ , & x=0\end{cases}=\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)\ , & x\in IR^* \\ 0\ , & x=0\end{cases}$ 1ن

-4 g قابلة للاشتقاق على IR معناه g قابلة للاشتقاق عند $x_0\in IR$

1- $x_0\neq 0$

0.5 ن g عبارة عن تركيب و جداء دوال قابلة للاشتقاق و منه فهي قابلة للاشتقاق 0.25 ن

2- $x_0=0$

$\lim_{x\to 0} g(x)-g(0)/x-0=\lim_{x\to 0}\ x\sin\frac{1}{x}=0$ (لأن $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ و $\lim_{x\to 0}x=0$) 0.25 + 0.75 ن

و منه g قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ و $g'(0)=0$

-5 $g'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\ , & x\neq 0 \quad 1ن \\ 0\ , & x=0 \quad 0.5ن\end{cases}$.

التمرين الثاني (09 نقاط)

$$f : IR^3 \to IR^3$$
$$f(x,y,z) = (x-y+z, -x+y-z, x-y+z)$$

-1

$\ker f = \{X = (x,y,z) \in IR^3 \ / \ f(X) = 0_{IR^3}\}$ ن 0.25

$f(X) = 0_{IR^3} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y = x+z$ ن 0.25

$\ker f = \{X = (x, x+z, z) \ / \ x,z \in IR\} \Rightarrow \ker f = [\ \{V_1 = (1,1,0), V_2 = (0,1,1)\}\ ]$ ن 0.5

$\{V_1, V_2\}$ مستقلة خطيا لأن $(\alpha_1 = 0 \wedge \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \wedge \alpha_2 = 0)$ ن 0.5

و منه $\{V_1, V_2\}$ أساس لـ $\ker f$ ن 0.25 وبالتالي $\dim \ker f = 2$ ن 0.25

-2

$\operatorname{Im} f = \{f(x,y,z)/(x,y,z) \in IR^3\} = \{(x-y+z, -x+y-z, x-y+z)/x,y,z \in IR\}$ ن 0.5

$= \{(x-y)(1,-1,1) + z(1,-1,1) \ / \ (x-y), z \in IR\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = [\{V_1\}] / V_1 = (1,-1,1)$ ن 0.5

ن 0.5 $V_1 \neq 0$ و منه $\{V_1\}$ مستقلة خطيا ن 0.5 و بالتالي $\{V_1\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$ ن 0.5

-3

f ليس تقابلي $\Leftarrow$ $(\dim \operatorname{Im} f = 1 \neq \dim IR^3 = 3)$ ن 0.5

-4

$V = \{(x,y,z) \in IR^3 \ / \ x+y-z=0\} = \{(x,y,x+y) \ / \ x,y \in IR\}$

أ-

V ف.ش.ج من IR^3 $\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} V \neq \phi \ (1) \\ \forall \alpha,\beta \in IR, \forall X = (x,y,z), Y = (x',y',z') \in V \ (2) \\ \alpha X + \beta Y \in V \end{array}\right\}$ ن 0.5

$(0,0,0) \in V \ (0 = 0+0) \Rightarrow V \neq \phi$ ن 0.5

$X \in V \Rightarrow X = (x, y, x+y)$

$Y \in V \Rightarrow Y = (x', y', x'+y')$

$\alpha X + \beta Y = (\alpha x, \alpha y, \alpha x + \alpha y) + (\beta x', \beta y', \beta x' + \beta y')$

$= (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha x + \alpha y + \beta x' + \beta y') = (x'', y'', x''+y'')$ ن 0.5

و منه $\alpha X + \beta Y \in V$ و بالتالي V ف.ش.ج من IR^3 ن 0.25

ب-

ن 0.25

$f(V) = \{f(X)/X \in V\} = \{f(x,y,x+y)/x,y \in IR\} = \{(2x, -2x, 2x) \ / \ x \in IR\}$ ن 0.5

$\Rightarrow f(V) = [\{V_1\}] / V_1 = (2,-2,2)$ ن 0.5

ن 0.25 $V_1 \neq 0$ و منه $\{V_1\}$ أساس لـ $f(V)$ ن 0.25 و بالتالي $\dim f(V) = 1$ ن 0.5

التمرين الثالث (06.5 نقاط)

$\forall x,y\in E \qquad x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1- * تبديلية $\Leftrightarrow \quad x*y=y*x \quad \forall x,y\in E$

1 ن (لأن الجمع و الضرب العاديين تبديلين في IR) $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{y+x}{1+yx}=y*x$

و منه * تبديلية

* تجميعية $\Leftrightarrow \quad x*(y*z)=(x*y)*z \quad \forall x,y,z\in E$ 0.5 ن

$$x*(y*z)=x*\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=\frac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)}=\frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$ 0.25 ن

$$(x*y)*z=\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z=\frac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)z}=\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$ 0.25 ن

نلاحظ أن $x*(y*z)=(x*y)*z$ و منه * تجميعية

* تقبل عنصرا حياديا $\Leftrightarrow \quad \exists e\in E/\ \forall x\in E \quad x*e=e*x=x$ 0.25 ن

بما أن * عملية تبديلية إذن نكتفي بجهة واحدة 0.25 ن

$x*e=x \Leftrightarrow \dfrac{x+e}{1+xe}=x \Leftrightarrow x+e=x+ex^2 \Leftrightarrow e(1-x^2)=0 \Rightarrow e=0\ (\forall x\in E)$ 0.5 ن

* النظير $\Leftrightarrow \quad \forall x\in E,\exists x'\in E\ /\ x*x'=x'*x=e$ 0.25 ن

بما أن * عملية تبديلية إذن نبحث عن جهة واحدة 0.25 ن

$x*x'=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+x'}{1+xx'}=0 \Rightarrow x'=-x$ 0.5 ن

و بالتالي $(E,*)$ زمرة تبديلية

-2 $(a) \quad x*x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1+x^2-4x=0$ 0.25 ن

$\Delta=16-4=12>0 \quad x_1=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}\ (\notin E) \ \wedge\ x_2=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\ (\in E)$

0.5 ن   0.5 ن .

$(b) \quad x*2x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{1+2x^2}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+6x+1=0$ 0.25 ن

$\Delta=36-8=28>0 \quad x_1=\dfrac{-6-2\sqrt{7}}{4}=-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\ (\notin E)$ 0.5 ن

$\wedge\ x_2=\dfrac{-6+2\sqrt{7}}{4}=\dfrac{-3+\sqrt{7}}{2}\ (\in E)$ 0.5 ن