جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

الجذع المشترك LMD
ST1, B
2009/01/25

الامتحان الفصلي الأول في مقياس الرياضيات I

ملاحظة : يمنع استعمال القلم الأحمر.

التمرين الأول(06ن)

I- لتكن العلاقة T المعرفة على IR بالشكل التالي:

$$\forall x, y \in IR\ ,\quad xTy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

- هل العلاقة T علاقة تكافؤ؟

II- نعرف على IR القانون * كما يلي :

$$\forall x, y \in IR, \quad x * y = \frac{x}{y}$$

- هل $(IR,*)$ زمرة ؟

التمرين الثاني (08ن)

ليكن f تطبيق خطي معرف من IR^3 نحو IR^3 بالشكل التالي :

$$f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$$

1 - أوجد أساس و بعد $\operatorname{Im} f$.
2 - استنتج بعد $\ker f$.
3 - هل التطبيق f متباين؟ غامر؟

التمرين الثالث (06ن)

1 - ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 3x}$

أ - عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

ب - أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

2 - نعرف التابع g بالشكل:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2 + 3x} & , \ x \in D_f \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

أ- أدرس استمرار التابع g عند $x_0 = 0$.

ب- أدرس قابلية اشتقاق التابع g عند $x_0 = 0$.

بالتوفيق للجميع

أ

جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

الجذع المشترك LMD
ST1, B
2009/01/25

الامتحان الفصلي الأول في مقياس الرياضيات I

ملاحظة : يمنع استعمال القلم الأحمر.

التمرين الأول(06ن)

I- لتكن العلاقة T المعرفة على IR بالشكل التالي:

$$\forall x,y\in IR\ ,\quad xTy \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$$

- هل العلاقة T علاقة تكافؤ؟

II- نعرف على IR القانون * كما يلي :

$$\forall x,y\in IR,\quad x*y=\frac{x}{y}$$

- هل $(IR,*)$ زمرة ؟

التمرين الثاني (08ن)

ليكن f تطبيق خطي معرف من IR^3 نحو IR^3 بالشكل التالي :

$$f(x,y,z)=(x-y,y-z,z-x)$$

1 - أوجد أساس و بعد $\operatorname{Im} f$.
2 - استنتج بعد $\ker f$.
3 - هل التطبيق f متباين؟ غامر؟

التمرين الثالث (06ن)

1 - ليكن التابع الحقيقي f المعرف كما يلي :

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^2+3x}$$

أ - عين D_f مجموعة تعريف التابع f.
ب - أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$

2 - نعرف التابع g بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x^2+3x} & ,\ x\in D_f\\ 0 & ,\ x=0\end{cases}$$

أ- أدرس استمرار التابع g عند $x_0=0$.
ب- أدرس قابلية اشتقاق التابع g عند $x_0=0$:

بالتوفيق للجميع

جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

الجذع المشترك LMD
ST1, B
2009/01/25

تصحيح الامتحان الفصلي في مقياس الرياضيات I

التمرين الأول

I- $\forall x,y\in IR : xTy \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$..........(1)

1. T انعكاسية $\Leftrightarrow \quad \forall x\in IR\ ,\ xTx$ (0.5ن)

$xTx \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2-x^2=x-x \Leftrightarrow 0=0$ (0.5ن)

(0.5ن) معادلة محققة دوما ومنه T انعكاسية.

2. T تناظرية $\Leftrightarrow \quad \forall x,y\in IR\ ,\ xTy \Rightarrow yTx$ (0.5ن)

$xTy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2-y^2=x-y \overset{x(-1)}{\Rightarrow} y^2-x^2=y-x$ (0.5ن) $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} yTx$

ومنه Tتناظرية (0.5ن)

3. T متعديه $\Leftrightarrow \quad \forall x,y,z\in IR,\ xTy\wedge yTz \Rightarrow xTz$ (0.5ن)

$xTy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2-y^2=x-y$

$yTz \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y^2-z^2=y-z$ (0.5ن)

بالجمع نجد:

$x^2-z^2=x-z \overset{(1)}{\Leftrightarrow} xTz$ (0.25ن)

ومنه Tمتعدية و بالتالي T علاقة تكافؤ. (0.25ن)

II- * داخلية $\Leftrightarrow \quad \forall x,y\in IR, x*y\in IR$ (0.5ن)

$\exists(x,y)=(1,0)\in IR^2 \quad \wedge x*y\notin IR$ (0.5ن)

ومنه $(IR,*)$ ليست زمرة . (0.5ن)

التمرين الثاني

$$f: IR^3 \to IR^3$$

$$f(x,y,z)=(x-y,y-z,z-x)$$

.1 $\operatorname{Im} f=\{f(X)/X\in IR^3\}=\{(x-y,y-z,z-x)/x,y,z\in IR\}$ (0.5ن)

$=\{x(1,0,-1)+y(-1,1,0)+z(0,-1,1)/x,y,z\in IR\}$

نضع: $A=\{V_1=(1,0,-1),V_2=(-1,1,0),V_3=(0,-1,1)\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f=[A]$ (0.5ن)

A مستقلة خطيا $\Leftrightarrow \quad \forall(\alpha_i)_{i=\overline{1,4}}\in IR, \sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i=0_{IR^3} \Rightarrow \alpha_i=0\forall i=\overline{1,4}$ (0.25ن)

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i=0_{IR^3} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_2-\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_3=0\end{cases}$$ (0.5ن) $\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ (0.25ن)

$$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i = 0_{IR^3} \Leftrightarrow \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1(V_1+V_2+V_3)=0 \overset{\forall \alpha_1}{\Rightarrow} V_1+V_2+V_3=0 \quad \textbf{(0.5ن)}$$

ومنه $\{V_1 , V_2 , V_3\}$ مرتبطة خطيا. **(0.25ن)**

$\{V_1 , V_2\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$ $(\alpha_1 , \alpha_2 \in IR, \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$ **(0.25ن)**

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 - \alpha_2 = 0\\ \alpha_2 = 0\\ -\alpha_1 = 0\end{cases} \quad \textbf{(0.5ن)} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \textbf{(0.25ن)}$$

و منه $\{V_1 , V_2\}$ مستقلة خطيا **(0.25ن)**

الخلاصة:

$\{V_1 , V_2\}$ مستقلة

$\mathrm{Im} f = [\{V_1 , V_2\}]$ (نظرية) **(0.25ن)** $\Leftarrow$ $\{V_1 , V_2\}$ أساس لـ $\mathrm{Im} f$ **(0.25ن)**

و منه $\dim \mathrm{Im} f = 2$ **(0.5ن)**

-2 **(01ن)** $\dim IR^3 = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$

(0.5ن) $\Rightarrow \dim \ker f = \dim IR^3 - \dim \mathrm{Im} f =$ 3-2=1

-3 **(0.75ن)** $\dim \ker f = 1 \neq 0 \Rightarrow$ f ليس متباينا

(0.75ن) $\dim \mathrm{Im} f = 2 \neq 3 = \dim IR^3 \Rightarrow$ f ليس غامرا

(أو بما أن f ليس متباينا و $E = F = IR^3$ إذن f ليس غامرا).

التمرين الثالث

-1 $$f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 3x}$$

/1

(أ) $D_f = IR \setminus \{0,-3\}$ **(1.5ن)**

(ب) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل ($\frac{0}{0}$) لإزالتها نستعمل قاعدة **لوبتال** **(0.5ن)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x^2+3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+3} = \frac{1}{3} \quad \textbf{(0.5ن)}$$

ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$ **(0.5ن)**

/2

(أ) g مستمر عند $x_0 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ **(01ن)**

(0.25ن) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x} = \frac{1}{3}$ (حسب السؤال السابق ب)

$\neq \mathrm{g}(0) = 0$ **(0.5ن)**

و منه g غير مستمر عند $x_0 = 0$ **(0.25ن)**

(ب) g غير مستمر عند $x_0 = 0$ إذن فهو غير قابل للاشتقاق عند $x_0 = 0$ **(01ن)**

$$\left(e^{x}-1\right)\sin x=\left(x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+o\left(x^{4}\right)\right)\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+o\left(x^{4}\right)\right)$$ **(0.5ن)**

$$\Rightarrow\left(e^{x}-1\right)\sin x=x^{2}+\frac{x^{3}}{2!}+o\left(x^{4}\right)$$ **(01ن)**

-3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)\sin x}{x^{2}+x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}+\frac{x^{3}}{2!}+o\left(x^{4}\right)}{x^{2}+x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}\left(1+\frac{x}{2!}+o\left(x^{2}\right)\right)}{x^{2}(1+x)}$$ **(0.5ن)**

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2!}+o(x)}{1+x}=1$$ **(01ن)**

جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

الجذع المشترك LMD
ST1, B
2009/01/25

تصحيح الامتحان الفصلي في مقياس الرياضيات I

التمرين الأول

I- $\forall x, y \in IR : xTy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$..........(1)

1. T انعكاسية $\Leftrightarrow \forall x \in IR \;,\; xTx$ **(0.5ن)**

$xTx \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 - x^2 = x - x \Leftrightarrow 0 = 0$ **(0.5ن)**

معادلة محققة دوما ومنه T انعكاسية. **(0.5ن)**

2. T تناظرية $\Leftrightarrow \forall x, y \in IR \;,\; xTy \Rightarrow yTx$ **(0.5ن)**

$xTy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 - y^2 = x - y \overset{x(-1)}{\Rightarrow} y^2 - x^2 = y - x$ **(0.5ن)** $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} yTx$

ومنه Tتناظرية **(0.5ن)**

3. T متعديه $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in IR, xTy \wedge yTz \Rightarrow xTz$ **(0.5ن)**

$xTy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x^2 - y^2 = x - y$

$yTz \overset{(1)}{\Leftrightarrow} y^2 - z^2 = y - z$ **(0.5ن)**

بالجمع نجد:

$x^2 - z^2 = x - z \overset{(1)}{\Leftrightarrow} xTz$ **(0.25ن)**

ومنه Tمتعدية و بالتالي T علاقة تكافؤ. **(0.25ن)**

II- * داخلية $\Leftrightarrow \forall x, y \in IR, x * y \in IR$ **(0.5ن)**

$\exists (x, y) = (1,0) \in IR^2 \quad \wedge x * y \notin IR$ **(0.5ن)**

ومنه $(IR,*)$ ليست زمرة . **(0.5ن)**

التمرين الثاني

$$f : IR^3 \to IR^3$$
$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$$

1. $\operatorname{Im} f = \{f(X) / X \in IR^3\} = \{(x - y, y - z, z - x) / x, y, z \in IR\}$ **(0.5ن)**

$= \{x(1,0,-1) + y(-1,1,0) + z(0,-1,1) / x, y, z \in IR\}$

نضع: $A = \{V_1 = (1,0,-1), V_2 = (-1,1,0), V_3 = (0,-1,1)\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = [A]$ **(0.5ن)**

A مستقلة خطيا $\Leftrightarrow \forall (\alpha_i)_{i=\overline{1,4}} \in IR, \sum_{i=1}^{4} \alpha_i V_i = 0_{IR^3} \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i = \overline{1,4}$ **(0.25ن)**

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i V_i = 0_{IR^3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$ **(0.5ن)** $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ **(0.25ن)**

$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i V_i = 0_{IR^3} \Leftrightarrow \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1(V_1+V_2+V_3)=0 \overset{\forall \alpha_1}{\Rightarrow} V_1+V_2+V_3=0$ **(0.5ن)**

ومنه $\{V_1, V_2, V_3\}$ مرتبطة خطيا. **(0.25ن)**

$\{V_1, V_2\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in IR, \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$ **(0.25ن)**

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 - \alpha_2 = 0\\ \alpha_2 = 0\\ -\alpha_1 = 0\end{cases}$$ **(0.5ن)** $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ **(0.25ن)**

و منه $\{V_1, V_2\}$ مستقلة خطيا **(0.25ن)**

الخلاصة:

$\{V_1, V_2\}$ مستقلة

$\operatorname{Im} f = [\{V_1, V_2\}]$ (نظرية) **(0.25ن)**

و منه $\dim \operatorname{Im} f = 2$ **(0.5ن)**

$\Leftarrow$ $\{V_1, V_2\}$ أساس لـ $\operatorname{Im} f$ **(0.25ن)**

-2 **(01ن)** $\dim IR^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$

(0.5ن) $\Rightarrow \dim \ker f = \dim IR^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3-2=1$

-3 **(0.75ن)** $\dim \ker f = 1 \neq 0 \Rightarrow$ f ليس متباينا

(0.75ن) $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq 3 = \dim IR^3 \Rightarrow$ f ليس غامرا

(أو بما أن f ليس متباينا و $E = F = IR^3$ إذن f ليس غامرا).

التمرين الثالث

-1 $$f(x)=\frac{\sin x}{x^2+3x}$$

/1

(أ) $D_f = IR \setminus \{0,-3\}$ **(1.5ن)**

(ب) $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x}$$

هي حالة عدم التعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$ لإزالتها نستعمل قاعدة **لوبتال** **(0.5ن)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x^2+3x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x+3} = \frac{1}{3}$$ **(0.5ن)**

ومنه $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{3}$ **(0.5ن)**

/2

(أ) g مستمر عند $x_0 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ **(01ن)**

(0.25ن) (حسب السؤال السابق ب) $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x} = \frac{1}{3}$

$\neq g(0) = 0$ **(0.5ن)**

و منه g غير مستمر عند $x_0 = 0$ **(0.25ن)**

(ب) g غير مستمر عند $x_0 = 0$ إذن فهو غير قابل للاشتقاق عند $x_0 = 0$ **(01ن)**