2010/2011 قسم العلوم التقنية .

EMD1 MATH 1

① نعرف على $\mathbb{R}^*$ العلاقة R بـ :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*, \quad x R y \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = y^2+\frac{1}{y^2}$$

أ) أثبت أن R هي علاقة تكافؤ .

ب) أوجد أصناف التكافؤ لعنصر x من $\mathbb{R}^*$ ثم استنتج صنف التكافؤ للعنصر $x=2$

② ليكن العدد المركب z' المعرف بـ :

$$z' = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$$

أ) أوجد طويلة وعمدة العدد المركب z'

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 = z'$

③ لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

أ) أدرس استمرارية الدالة f

ب) أحسب $f'_g(1)$ و $f'_d(1)$

ج) هل f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$

د) أحسب $f'(x)$

④ لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

أ) أوجد E مجموعة تعريف f

ب) هل f زوجية أم فردية .

ج) هل f متباينة

د) أحسب $\lim_{x\to\infty} f(x)$ واستنتج أن f ليست غامرة .

هـ) نفرض أن $f : E \longrightarrow F$

أوجد المجموعة F حتى تكون الدالة f غامرة .

بالتوفيق

(B)

التمرين الثاني

لدينا

$$z' = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$$

بوضع

$$u_1 = \sqrt{3}+i \neq 0$$
$$u_2 = \sqrt{3}-i = \bar{u}_1$$

وعليه

$$|u_1| = |\bar{u}_1| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

ومنه

$$|z'| = \frac{|u_2|}{|u_1|} = \frac{|\bar{u}_1|}{|u_1|} = \frac{|u_1|}{|u_1|} = 1$$

أو

$$|z'| = \frac{|u_2|}{|u_1|} = \frac{2}{2} = 1$$

وبالتالي:

$$u_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) \qquad \arg u_1 = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$$
$$u_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) \qquad \arg u_2 = -\pi/6 \quad [2\pi]$$

وعليه:

$$\arg z' = \arg u_2 - \arg u_1 = \arg \bar{u}_1 - \arg u_1 \quad [2\pi].$$
$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\pi/3$$

وعليه

$$z' = e^{-i\pi/3}$$

ب) لدينا

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = z' = e^{-i\pi/3}$$

وبالتالي:

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} 0 \leq k \leq 2$$

اذن

$$z_k = e^{i\left(-\pi/9 + 2\frac{k\pi}{3}\right)} \qquad 0 \leq k \leq 2$$

(3)

التمرين الثالث:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x<1\\ x^2+2 & ; \ x\geq 1\end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}$

أ) على المجال $]-\infty,1[$ الدالة f مستمرة كونها دالة كثيرات حدود

على المجال $]1,+\infty[$ " " " " " " " "

عند $x_0=1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}(2x+1)=3=f(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}(x^2+1)=3=f(1)$$

وبالتالي:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)=f(1)=3$$

اذن f دالة مستمرة عند $x=1$، وإعتبارا لما سبق فإنها مستمرة على $\mathbb{R}$

ب)

$$f'(1+0)=f'_d(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{x^2+2-3}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\>}}(x+1)=2$$

$$f'(1-0)=f'_g(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{2x+1-3}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$$

وعليه:

$$f'(1+0)=f'(1-0)=2 \qquad f'_d(1)=f'_g(1)=2$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$.

د) على $]-\infty,1[$ f قابلة للاشتقاق لانها كثيرات حدود

على $]1,+\infty[$ " " " " " "

وعند $x_0=1$ " " " " " " استدلالا.

$$f'(x)=\begin{cases}2 & ; \ x\leq 1\\ 2x & ; \ x>1\end{cases}$$

D

التمرين الرابع:

$$f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

أ)
$$E = D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$
$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +1[\cup]+1, +\infty[.$$

ب) ملاحظة:

$D_f = E$ متناظر بالنسبة إلى المبدأ.

$$\forall x \in D_f = E \Rightarrow -x \in D_f = E$$
$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$$

ومنه الدالة f زوجية على $E = D_f$

ج) هنا لدينا عدة طرق لإثبات أن الدالة f ليست متباينة.

- $2 \in D_f \Rightarrow -2 \in D_f \quad 2 \neq -2 \quad \wedge \quad f(-2) = f(2)$

لأن f دالة زوجية

- $\forall x \in D_f, x \neq 0 \Rightarrow -x \in D_f \quad -x \neq x \quad \wedge \quad f(-x) = f(x)$

لأن f دالة زوجية

.. $\forall x_1 \in D_f, \forall x_2 \in D_f \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1^2+1}{x_1^2-1} = \frac{x_2^2+1}{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

f ليست متباينة.

د)
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

نفرض أن $y = 1$ ونبحث فيما إذا وجد x من $E = D_f$ بحيث $f(x) = y = 1$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 \Rightarrow x^2+1 = x^2-1 \Rightarrow 1 = -1$$

مستحيل وبالتالي الدالة f ليست غامرة.

هـ)
$$f : E = D_f \longrightarrow F$$

البحث عن F من $\mathbb{R}$ حتى تكون الدالة f غامرة من D_f إلى F.

ليكن y من F بحيث $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ، علينا: $yx^2 - y = x^2 + 1$

وبالتالي: $yx^2 - x^2 = y + 1$ أي $x^2(y-1) = y+1$

إذن $y \neq 1$ و $x^2 = \frac{y+1}{y-1} \geq 0$ أي $(y+1)(y-1) \geq 0$

ومنه: $x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$ لما $y \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$

2010 / 2011 قسم العلوم والتقنيات

1

حل نموذجي مقترح لـ :

1ère EMD . MATH 1

التمرين الاول

أ) $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$

$\bullet\ \forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^2+\frac{1}{x^2} = x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow x\mathcal{R}x$

ومنه $\mathcal{R}$ علاقة إنعكاسية

$\bullet\bullet\ \forall x\in\mathbb{R}^*, \forall y\in\mathbb{R}^* \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2} = y^2+\frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2+\frac{1}{y^2} = x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow y\mathcal{R}x$

ومنه $\mathcal{R}$ تناظرية .

$$\bullet\bullet\bullet\ \begin{matrix}\forall x\in\mathbb{R}^*\\ \forall y\in\mathbb{R}^*\\ \forall z\in\mathbb{R}^*\end{matrix} \quad \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1/x^2 = y^2+1/y^2 \\ y^2+1/y^2 = z^2+1/z^2\end{cases} \Rightarrow x^2+1/x^2 = z^2+1/z^2 \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

ومنه $\mathcal{R}$ متعدية. وبالتالي $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على $\mathbb{R}^*$.

ب)

$$\dot{x} = \bar{x} = \{y\in\mathbb{R}^* : y\mathcal{R}x\} = \{y\in\mathbb{R}^* : y^2+\tfrac{1}{y^2} = x^2+1/x^2\}$$

اذن البحث عن y من $\mathbb{R}^*$ حيث

$$y^2+\frac{1}{y^2} = x^2+1/x^2 \Rightarrow (y^2-x^2)+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2} = 0$$

$$(y^2-x^2)+\frac{x^2-y^2}{x^2y^2} = 0$$

$$(y^2-x^2)\left(1-\frac{1}{y^2x^2}\right) = 0 \quad \begin{cases} y^2=x^2 \Rightarrow y=\pm x \\ y^2x^2=1 \Rightarrow y = \pm 1/x \quad (x\neq 0)\end{cases}$$

وعليه:

$$\dot{x} = \bar{x} = \{-x, +x, -1/x, 1/x\}$$

ومنه

$$\dot{2} = \bar{2} = \{-2, 2, -1/2, 1/2\}$$