جامعة منتوري قسنطينة
المدة: 1 ساعة و نصف

الجذع المشترك LMD
$ST_{1,A}$
2009/05/30

الامتحان الفصلي الأول في مقياس الرياضيات II

التمرين 01(05ن)

احسب التكاملين التاليين

$$I_2(x)=\int\frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx \qquad , \qquad I_1(x)=\int\left(x^2-x+3\right)e^x dx$$

التمرين 02(07.5ن)

1- أوجد الحل العام للمعادلة $y''-3y'+2y=0$

2- حل الجملتين $(S_2)..\begin{cases} a-3b=1\\ 3a+b=3\end{cases}$ $\quad (S_1)..\begin{cases} 2a=2\\ -3a+2b=-1\end{cases}$

3- استنتج الحل العام للمعادلتين

$$(*).....y''-3y'+2y=2x-1$$
$$(**).....y''-3y'+2y=\cos x+3\sin x$$

4- أكتب الحل العام للمعادلة $y''-3y'+2y=2x-1+\cos x+3\sin x$.

التمرين 03(07.5ن)

ليكن التطبيق الخطي f المعرف بــ

$$f: IR^3\to IR^3$$
$$(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(5x+y-z, 2x+4y-2z, x-y+3z)$$

1- عين $\ker f$ و $\dim\ker f$.

2- استنتج $\dim \operatorname{Im} f$.

3- هل f تقابلي؟

4- عين المصفوفة A المرافقة للتطبيق f وفق الأساس النظامي لـ IR^3

5- احسب A^{-1} .

6- استنتج حل الجملة (S) حيث $(S)..\begin{cases} 5x+y-z=8\\ 2x+4y-2z=12\\ x-y+3z=-4\end{cases}$.

بالتوفيق للجميع

جامعة منتوري قسنطينة
المدة 1 ساعة و نصف
2009-05-30

الجذع المشترك *LMD*
$ST_{1,B}$

مراقبة في مقياس الرياضيات II

ملاحظة - يمنع استعمال الآلة الحاسبة، الهاتف النقال والقلم الأحمر.
- يؤخذ بعين الاعتبار التقديم الجيد لورقة الإجابة.

التمرين الأول (5 نقاط)

1) حل المعادلة التفاضلية التالية $y''+y=0$ ....(*)

2) عين الأعداد الحقيقية a و b حتى يكون $y_p=(a+bx)e^x$ حلا خاصا للمعادلة التفاضلية التالية

$$y''+y=(x-1)e^x \quad ....(**)$$

3) استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (**).

التمرين الثاني (7 نقاط)

لتكن المصفوفة A المعطاة بالشكل التالي

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

1) أوجد القيم الذاتية الحقيقية للمصفوفة A.
2) من أجل كل قيمة ذاتية λ عين $\dim V_\lambda$ بعد الفضاء الذاتي المرافق لها.
3) هل المصفوفة A قابلة للتقطير؟

التمرين الثالث (8 نقاط)

I- ليكن التابع $f: IR^2 \to IR$ حيث $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

1) عين D_f مجموعة تعريف f. ماذا تمثل بيانيا؟
2) باستعمال تحويل المتغير، أحسب مساحة D_f.

II- ليكن التابع $g: IR^2 \to IR$ حيث $g(x,y)=(f(x,y))^2$

1) أكتب عبارة $g(x,y)$.
2) عين المشتقات الجزئية $\frac{\partial g}{\partial x}$ ، $\frac{\partial g}{\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}$ ، $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$
3) هل يقبل التابع g قيم قصوى ؟ ما هي ؟
4) أحسب التكامل الثلاثي $I=\iiint_\Delta g(x,y)\,dx\,dy\,dz$ حيث $\Delta=[1,2]\times[2,3]\times[3,4]$

بالتوفيق للجميع

الحل النموذجي للامتحان الفصلي في مادة الرياضيات II

التمرين01(05ن)

أ- $I_1(x) = \int (x^2 - x + 3)e^x dx$

نستعمل التكامل بالتجزئة مرتين

(*) $u = x^2 - x + 3 \Rightarrow u' = 2x - 1 \wedge v' = e^x \Rightarrow v = e^x$ **(0.5ن)**

(0.25ن)

$I_1(x) = (x^2 - x + 3)e^x - \int (2x-1)e^x dx$

(**) $u = 2x - 1 \Rightarrow u' = 2 \wedge v' = e^x \Rightarrow v = e^x$ **(0.5ن)**

$I_1(x) = (x^2 - x + 3)e^x - \left((2x-1)e^x - \int 2e^x dx\right)$ **(0.25ن)**

$I_1(x) = (x^2 - 3x + 4)e^x + 2\int e^x dx = (x^2 - 3x + 6)e^x + c \,/\, c = cste$ **(0.5ن)**

ب- $I_2(x) = \int \frac{\cos x \; dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$

نلاحظ أن $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ **(0.25ن)**

ومنه نضع $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$ **(0.5ن)**

$I_2(x) = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 5}$

$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-5) = 0$ **(0.5ن)**

نقوم بتفكيك النسبة إلى عوامل بسيطة بالشكل التالي

$\frac{1}{(t-1)(t-5)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-5}$.......(*) **(0.5ن)**

لإيجاد A (على التوالي B) نضرب المعادلة (*)في $(t-1)$ (على التوالي$(t-5)$) ثم نأخذ $(t \to 1)$ (على التوالي$(t \to 5)$) فنجد $A = -\frac{1}{4} \wedge B = \frac{1}{4}$ **(0.5ن)**

و منه $I_2(x) = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{t-5} - \int \frac{dt}{t-1}\right) = \ln\left(\frac{t-5}{t-1}\right)^{\frac{1}{4}} + c$ **(0.5ن)**

$= \ln\left(\frac{\sin x - 5}{\sin x - 1}\right)^{\frac{1}{4}} + c \;\; / \, c = cste$ **(0.25ن)**

التمرين02(07.5ن)

-1 $y'' - 3y' + 2y = 0$

معادلتها المميزة هي

$k^2 - 3k + 2 = 0$ **(0.5ن)**

$\Rightarrow k_1 = 1 \wedge k_2 = 2$ **(0.25ن)**

حلها العام هو $y_H = c_1 \, e^x + c_2 \, e^{2x} \,/\, c_1, c_2 = cstes$ **(0.25ن)**

-2 $(S_1)\begin{cases}2a=2\\-3a+2b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ **(0.5ن)**

$(S_2)\begin{cases}a-3b=1\\3a+b=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ **(0.5ن)**

-3

أ- $y''-3y'+2y=2x-1.........(*)$

حلها العام من الشكل $y_G=y_H+y_p$

حيث

(حسب السؤال 1) $y_H=c_1\,e^x+c_2\,e^{2x}\,/\,c_1,c_2=cstes$ **(0.25ن)**

و y_p حل خاص للمعادلة (*) من الشكل

$y_P=ax+b$ **(0.5ن)**

$\Rightarrow y'_p=a \;\wedge y''_p=0$ **(0.5ن)**

بالتعويض في المعادلة (*) والمطابقة نجد

$\begin{cases}2a=2\\-3a+2b=-1\end{cases}$ **(0.25ن)**

وهي الجملة (S_1) سابقا وبالتالي $a=1\;\wedge b=1$

ومنه $y_p=x+1$ **(0.25ن)**

و $y_G=c_1\,e^x+c_2\,e^{2x}+x+1/\;c_1,c_2=cstes$ **(0.25ن)**

ب- $(**).....y''-3y'+2y=\cos x+3\sin x$

حلها العام من الشكل $y_G=y_H+y_p$

حيث

(حسب السؤال 1) $y_H=c_1\,e^x+c_2\,e^{2x}\,/\,c_1,c_2=cstes$ **(0.25ن)**

و y_p حل خاص للمعادلة (**)

بما أن الطرف الثاني من الشكل $(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$ حيث $\omega=1$

فإن $y_p=a\cos x+b\sin x$ **(01ن)**

$\Rightarrow y'_p=-a\sin x+b\cos x\;\wedge\;\;y''_p=-a\cos x-b\sin x$

بالتعويض في المعادلة (**) والمطابقة نجد $\begin{cases}a-3b=1\\3a+b=3\end{cases}$ **(0.25ن)**

وهي الجملة السابقة (S_2) والحل الخاص يصبح $y_p=\cos x$ **(0.25ن)**

$\Rightarrow y_G=c_1e^x+c_2e^{2x}+\cos x\;\;/\,c_1,c_2=cstes$ **(0.25ن)**

-4 $(***)\quad y''-3y'+2y=2x-1+\cos x+3\sin x$

حلها العام من الشكل $y_G=y_H+y_p$

حيث

(حسب السؤال 1) $y_H = c_1\ e^x + c_2\ e^{2x} \ / \ c_1, c_2 = cstes$ **(0.25ن)**

$y_p = y_{p1} + y_{p2}$ **(0.25ن)**

علما أن

(حل خاص للمعادلة (*)) $y_{p1} = x + 1$ **(0.25ن)**

(حل خاص للمعادلة (**)) $y_{p2} = \cos x$ **(0.25ن)**

$\Rightarrow y_G = c_1\ e^x + c_2\ e^{2x} + \cos x + x + 1 \ / \ c_1, c_2 = cstes$ **(0.5ن)**

التمرين03(07.5ن)

$$f(x,y,z) = (5x + y - z, 2x + 4y - 2z, x - y + 3z)$$

-1

$\ker f = \{(x,y,z) \in IR^3 \ / \ f(x,y,z) = 0_{IR^3}\}$ **(0.25ن)**

$f(x,y,z) = 0_{IR^3} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} f(x,y,z) = 0_{IR^3} \quad \Rightarrow x = y = z = 0$ **(0.5ن**

$\ker f = \{0_{IR^3}\} \quad \Rightarrow \dim \ker f = 0$ **(0.25ن)**

-2 $\dim IR^3 = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ **(0.25ن)**

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$ **(0.25ن)**

-3 أ- $\dim \ker f = 0 \ \Rightarrow$ f متباين **(0.25ن)**

ب- $\begin{cases} f \text{ متباين} \\ E = F = IR^3 \end{cases} \Rightarrow$ f غامر وبالتالي f تقابلي **(0.5ن)**

-4

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (5x, 2x, x) + (y, 4y, -y) + (-z, -2z, 3z) \\ &= x(5,2,1) + y(1,4,-1) + z(-1,-2,3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **(0.5ن)**

-5 $|A| = 48 \neq 0$ **(0.5ن)**

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{(comA)^t}{|A|}$$ **(0.25ن)**

$$comA = (c_{ij})_{1\le i,j\le 3} / \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right| \ , \forall i,j = 1,2,3.$$ **(0.25ن)**

حيث A_{ij} المصفوفة الناتجة عن A بحذف السطر i والعمود j

(2.25ن)
$$\begin{cases} c_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10, & c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8, & c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \\ c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2, & c_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16, & c_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \\ c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2, & c_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8, & c_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 18. \end{cases}$$

$$com\,A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & -6 \\ -2 & 16 & 6 \\ 2 & 8 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow (com\,A)^t = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -8 & 16 & 8 \\ -6 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$ **(0.25ن)**

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -8 & 16 & 8 \\ -6 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$ **(0.25ن)**

6- الجملة (S) تكافئ $AX = B$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ **(01ن)**

الجذع المشترك LMD
ST1, B

جامعة منتوري قسنطينة
المدة 1 ساعة و نصف
2009-05-30

الحل النموذجي للمراقبة في مقياس الرياضيات II

التمرين الأول (5 نقاط)

1) حل المعادلة التفاضلية التالية $(*) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y''+y=0$

المعادلة المميزة المرافقة للمعادلة (*) هي $k^2+1=0$ **(0.5)**

وهي تقبل حلين مركبين $k_1=i$ و $k_2=-i$ **(0.5)**

اذن الحل العام للمعادلة (*) هو $y_H=C_1\cos x+C_2\sin x$ **(01ن)**

2) تعيين الأعداد الحقيقية a و b حتى يكون $y_p=(a+bx)e^x$ حلا خاصا للمعادلة التفاضلية التالية

$(**) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y''+y=(x-1)e^x$

لدينا $y'_p=(a+b+bx)e^x \quad \Rightarrow y''_p=(a+2b+bx)e^x$ **(0.5)**

بالتعويض في المعادلة (**) نجد $(2a+2b+2bx)e^x=(x-1)e^x$ **(0.5)**

بالمطابقة نجد $\Rightarrow\begin{cases}2a+2b=-1\\ 2b=1\end{cases}\Rightarrow b=\dfrac{1}{2}\wedge a=-1$ **(0.5)**

$$y_p=\left(-1+\frac{1}{2}x\right)e^x$$ **(0.5)**

3) الحل العام للمعادلة التفاضلية (**) $y_G=y_H+y_P$ **(0.5)**

$$\Rightarrow y_G=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(-1+\frac{1}{2}x\right)e^x$$ **(0.5)**

التمرين الثاني (7 نقاط)

لتكن المصفوفة A المعطاة بالشكل التالي $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\0&-1&2\end{bmatrix}$

1) القيم الذاتية الحقيقية للمصفوفة A هي حلول المعادلة المميزة المرافقة لـ A.
المعادلة المميزة المرافقة لـ A هي

(01ن) $\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(2-\lambda)(\lambda-1)^2=0$

ومنه القيم الذاتية لـ A هي $\lambda_1=2$ و $\lambda_2=1$ **(0.5)**

2) لدينا $1\le \dim V_\lambda \le \alpha$ حيث α هي درجة تضاعف القيمة الذاتية λ

من أجل القيمة الذاتية λ_1 فان $1\le \dim V_{\lambda_1}\le 1$ ومنه $\dim V_{\lambda_1}=1$ **(01ن)**

-

- من أجل القيمة الذاتية λ_2 فان $1\le \dim V_{\lambda_2}\le 2$. لتحديد $\dim V_{\lambda_2}$ نعين أولا V_{λ_2}

$$V_{\lambda_2}=\{X\in IR^3/(A-I_3)X=0_{IR^3}\}$$ **(0.5)**

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3$$ **(01ن)**

$$V_{\lambda_2}=\left\{x_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}/x_1\in IR\right\}$$ **(0.5)**

ومنه الشعاع $(1,1,1)$ يولد الفضاء الذاتي V_{λ_2} وبما أنه غير معدوم فهو مستقل خطيا **(01ن)**

وبالتالي يشكل أساسا لـ V_{λ_2} إذن $\dim V_{\lambda_2}=1$ **(0.5)**

المصفوفة A غير قابلة للتقطير **(0.25)** لأن $\dim V_{\lambda_1}=1$ يختلف عن درجة تضاعف λ_1 **(0.75)**

التمرين الثالث (8 نقاط)

I- ليكن التابع $f:IR^2\to IR$ حيث $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

1) تعيين D_f مجموعة تعريف f .

$$D_f=\{(x,y)\in IR^2/1-x^2-y^2\ge 0\}=\{(x,y)\in IR^2/x^2+y^2\le 1\}$$ **(0.5)**

و هي تمثل بيانا القرص المغلق الذي مركزه $(0,0)$ و نصف قطره 1. **(0.25)**

باستعمال تحويل المتغير من الإحداثيات الكارتيزية إلى الإحداثيات القطبية $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ **(0.25)**

فان مساحة D_f $\quad S_{D_f}=\iint_{D_f}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r\,dr\right)d\theta$ **(0.5)**

(0.5) $$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\pi$$

II- ليكن التابع $g:IR^2\to IR$ حيث $g(x,y)=\left(f(x,y)\right)^2$

1) عبارة $g(x,y)$. $\quad g(x,y)=1-x^2-y^2$ **(0.5)**

2) تعيين المشتقات الجزئية $\frac{\partial g}{\partial x}=-2x$ **(0.25)** ، $\frac{\partial g}{\partial y}=-2y$ **(0.25)**،

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=0$ **(0.25)** ، $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-2$ **(0.25)** ، $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-2$ **(0.25)**

3) لتحديد النقاط الحدية يجب أولا البحث عن النقاط الحرجة أي

(0.5) $$\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}=-2x=0\\ \frac{\partial g}{\partial y}=-2y=0\end{cases}\Rightarrow x=y=0$$

ومنه $(0,0)$ نقطة حرجة لـ g **(0.25)**

لمعرفة أنها نقطة حدية أم لا نحسب $s=\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)=0$ **(0.25)**،

$r=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)=-2$ **(0.25)**، $t=\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)=-2$ **(0.25)**

ومنه $s^2-rt=-4<0$ **(0.25)** أي أن $(0,0)$ نقطة حدية **(0.25)**

وبما أن $r<0$ فان التابع g يقبل عند النقطة $(0,0)$ قيمة عظمى **(0.25)**

وهي $g(0,0)=1$ **(0.25)**

3) حساب التكامل الثلاثي

$$I=\iiint_\Delta g(x,y)\,dx\,dy\,dz=\iiint_\Delta dx\,dy\,dz-\iiint_\Delta x^2\,dx\,dy\,dz-\iiint_\Delta y^2\,dx\,dy\,dz$$

(0.5)
$$I_1=\iiint_\Delta dx\,dy\,dz=\int_1^2\left(\int_2^3\left(\int_3^4 dz\right)dy\right)dx=\int_1^2\left(\int_2^3[z]_3^4dy\right)dx=\int_1^2\left(\int_2^3(4-3)dy\right)dx$$
$$=\int_1^2[y]_2^3\,dx=\int_1^2(3-2)dx=[x]_1^2=1$$

(0.5)

$$I_2 = \iiint_{\Delta} x^2\,dx\,dy\,dz = \int_1^2\left(\int_2^3\left(\int_3^4 x^2 dz\right)dy\right)dx = \int_1^2\left(\int_2^3 x^2[z]_3^4 dy\right)dx$$

$$= \int_1^2\left(\int_2^3 x^2(4-3)dy\right)dx = \int_1^2 x^2[y]_2^3\,dx = \int_1^2 x^2(3-2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$$

(0.5)...............

$$I_3 = \iiint_{\Delta} y^2\,dx\,dy\,dz = \int_1^2\left(\int_2^3\left(\int_3^4 y^2 dz\right)dy\right)dx = \int_1^2\left(\int_2^3 y^2[z]_3^4 dy\right)dx$$

$$= \int_1^2\left(\int_2^3 y^2(4-3)dy\right)dx = \int_1^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_2^3 dx = \int_1^2 \frac{19}{3}\,dx = \frac{19}{3}[x]_1^2 = \frac{19}{3}$$

و منه

(0.25)

$$I = \iiint_{\Delta} g(x,y)\,dx\,dy\,dz = 1 - \frac{7}{3} - \frac{19}{3} = -\frac{23}{3}$$