2012/01/16
المدة: ساعة ونصف

جامعة منتوري قسنطينة
علوم و التقنيات ـــ هندسة النقل

مراقبة في مقياس الرياضيات 1

(يمنع استعمال **القلم الأحمر**، الآلة الحاسبة و الهاتف النقال)

التمرين الأول (06 نقاط)

أجب بـ **صحيح** أو **خطأ** مع التعليل.

1) $\phi \cup \{1,2\} = \{1,2,\phi\}$

2) علاقة أقل " $<$ " المعرفة على IR هي ترتيب.

3) $(IN,+)$ زمرة تبديليه.

4) $f : IR - \{0,1\} \to IR - \{0,1\}$ حيث $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ هو تطبيق.

5) $\arcsin(\sin\pi) = \pi$

6) التابع sh يقبل نشر تايلور جوار الصفر.

التمرين الثاني (06 نقاط)

ليكن التطبيق الخطي f المعرف من IR^2 نحو IR^3 بالشكل $f(x,y) = (x-3y,\ 2x-y, \sqrt{2}x-2y)$

1) عين $\ker f$. هل f متباين؟ غامر؟

2) أوجد أساسا لـ $\operatorname{Im} f$.

التمرين الثالث (08 نقاط)

أ) ليكن التابع الحقيقي f المعرف بالشكل التالي $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\ln(1+x)}$

1) عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

2) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$.

ب) نعرف التابع الحقيقي g بالشكل التالي

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ,x \in D_f \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

1) عين D_g مجموعة تعريف التابع g.

2) أدرس استمرار التابع g عند النقطة $x_0 = 0$. هل يمكن إعطاء صيغة تايلور للتابع g جوار $x_0 = 0$؟ علل.

3) هل التابع g قابل للاشتقاق عند النقطة $x_1 = 1$؟

بالتوفيق

جامعة منتوري قسنطينة 2011/2012
علوم و التقنيات ــ هندسة النقل

الحل النموذجي للمراقبة في مقياس الرياضيات1

التمرين الأول (06 نقاط)

1) **خطأ (0.5 ن)**. لأن $\phi \cup \{1,2\} = \{1,2\}$ **(0.5 ن)**.

2) **خطأ (0.5 ن)**. لأن 1 ليس أقل من 1 أي " $<$ " ليست انعكاسية. **(0.5 ن)**

3) **خطأ (0.5 ن)**. لأن العدد 1 لا يقبل نظير بالنسبة للجمع في IN. **(0.5 ن)**

4) **خطأ (0.5 ن)**. لأن $x=-1 \in IR-\{0,1\}$ لا يملك صورة بواسطة f في $IR-\{0,1\}$. **(0.5 ن)**

5) **خطأ (0.5 ن)**. لأن arcsin معرف من $[-1,1]$ نحو $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ومنه $\arcsin(\sin\pi)=0$. **(0.5 ن)**

6) **صحيح (0.5 ن)**. لأن التابع sh يقبل الاشتقاق ما لانهاية من المرات جوار الصفر. **(0.5 ن)**

التمرين الثاني (06 نقاط)

1) **(0.25 ن)** $\ker f = \{X \in IR^2 / f(X) = 0_{IR^3}\}$

(0.25 ن) $= \{(x,y) \in IR^2 / (x-3y, 2x-y, \sqrt{2}x-2y) = (0,0,0)\}$

(0.5 ن) $= \{(0,0)\}$

$\dim Kerf = 0 \Leftrightarrow$ f متباين **((0.5 ن)+(0.5 ن))**

$\dim \operatorname{Im} f = \dim IR^2 - \dim \ker f = 2 < \dim IR^3 = 3$ **(0.5 ن)**

ومنه f ليس غامر. **(0.5 ن)**

2) **(0.25 ن)** $\operatorname{Im} f = \{(x-3y, 2x-y, \sqrt{2}x-2y) / x,y \in IR\}$

(0.5 ن) $\operatorname{Im} f = [\{(1,2,\sqrt{2}),(-3,-1,-2)\}] = [\{V_1,V_2\}]$

(0.25 ن) $\{V_1,V_2\}$ مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$ $(\alpha_1,\alpha_2 \in IR, \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{IR^3} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$

(0.75 ن) $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{IR^3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \sqrt{2}\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ **(0.25 ن)**

و منه $\{V_1,V_2\}$ مستقلة خطيا **(0.5 ن)**

الجملة $\{V_1,V_2\}$ مستقلة خطيا و مولدة لـ $\operatorname{Im} f$ فهي تشكل أساسا له.**(0.5 ن)**

التمرين الثالث (08 نقاط)

(أ

1) تعيين D_f مجموعة تعريف التابع f.

(0.75 ن) $D_f = \{x \in IR / 1+x > 0 \wedge 1+x \neq 1 \wedge -1 \leq x \leq 1\}$

(0.5 ن) $=]-1,0[\cup]0,1]$

2) $\lim_{x \to 0} f(x)$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$ **(0.25 ن)** لإزالتها نستعمل قاعدة لوبتال **(0.25 ن)**

لدينا البسط والمقام تابعان قابلان للاشتقاق جوار الصفر **(0.25 ن)** و مشتقة المقام لا تنعدم جوار الصفر. **(0.25 ن)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x)'}{(\ln(1+x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x}}=1$$ **(0.75 ن)**

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=1$$ **(0.5 ن)**

لحساب $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)$. لدينا arcsin تابع محدود **(0.25 ن)** و $\frac{1}{\ln(1+x)}\to 0$ لما $x\xrightarrow{>}-1$ **(0.25 ن)**

$$\Rightarrow \lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{\arcsin x}{\ln(1+x)}=0$$ **(0.5 ن)**

ب)

1) $D_g=]-1,1]$. **(0.5 ن)**

2) g مستمر عند $x_0=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ **(0.5 ن)**

(حسب السؤال السابق أ2) $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=1$ **(0.5 ن)**

(0.25 ن) التابع g غير مستمر عند النقطة $x_0=0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0} g(x)\neq g(0)=0$ **(0.25 ن)**

لا يمكن إعطاء صيغة تايلور للتابع g جوار $x_0=0$ **(0.25 ن)** لأنه لا يقبل الاشتقاق عندها. **(0.25 ن)**

3) g قابلة للاشتقاق عند $x_1=1$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=l$ حيث l عدد منته. **(0.25 ن)**

بما أن g غير معرف عن يمين $x_1=1$ **(0.25 ن)** فإن g غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_1=1$ **(0.5 ن)**