guide_pharmacie@yahoo.fr

Université de Batna
Faculté de Médecine
Département de Pharmacie

2005/2006

Cours de Probabilité

1$^{\text{ère}}$ Année Pharmacie

Chapitre II : Calcul des probabilités

D'après le cahier de :

I. Hadef

Created by: T. Djebaili

Chapitre II. Calcul des probabilités.

Notions de bases.

1/ Expériences aléatoire.

C'est une experience que pour certains conditions soit realisé ou non, on se limite aux cas où l'experience peut être répétée plusieurs fois dans les mêmes conditions.

Exemple:

1/ Lancer un dé ou plus.

2/ lancer une pièce de monnait

2/ L'ensemble fondamental.

On appelle ensemble fondamental si l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
Cet ensemble peut être fini ou infini denombrable.

exp:

1/ Lancer deux dés équilibrés.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}.$$
$$= \{(1,1),(1,2), \dots (6,6)\}.$$

3/ L'évènement élémentaire

Tout élément $\omega \in \Omega$ s'appelle évènement élémentaire
Il s'agit d'un évenement qui ne sera realisé que

par un seul resultat de l'experience aleatoire.

exp:

1/ "Obtenir un 4" en jetant un dé equilibré est un évenement elementaire.

2/ "Obtenir un nombre impair" n'est pas un évenement elementaire

Définition - On appelle évenement tout ce qui peut se réalise ou ne pas se réalise à la suite d'une expérience aléatoire. [tout sous ensemble A de Ω $A \subseteq \Omega$].

Realisation d'un évènement:

Proposition: A tout experience aléatoire A, on peut donc toujours associés un ensemble fondamentale Ω

1/ ϕ est un évènement qui ne se réalise jamais [si l'événement impossible].

2/ Ω est l'évènement qui se realise toujour [si l'evènement certain].

3/ soient A et B deux évenements ($A \subseteq \Omega$, $B \subseteq \Omega$)

- $A \cup B$: designe un évenement qu'est realise si au moins un des éléments A et B est réalise
- $A \cap B$: designe un évènement qu'est realise si

A et B sont réalisé

- $C_\Omega A = \bar{A} = A^c$ (complimentaire de A dans Ω) évènement qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.

$\bar{\phi} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \phi$

* $A \cap B = \phi$ (A et B sont disjoint designe que les évènements A et B sont incompatible, c'est à dire il ne se réalisent pas en même temps.

Notions de probabilité :

1/ la probabilité uniforme.

considerons l'experience aleatoire "jet un dé" l'ensemble fondamental :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Designons par R_i "obtenir le chiffre i"

Alors $P(\Omega) = P(R_1) + P(R_2) + P(R_3) + \dots + P(R_6)$.

puisque Ω est l'évènement certain

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{6} P(R_i) \Rightarrow \left\{ \frac{P(R_i) = \frac{1}{6}}{i = 1, 6} \right.$$

la probabilité dans ce cas est dite uniforme, les R_i sont équiprobable en général, A une expérience aléatoire, Ω l'ensemble fondamental, si E est un événement élémentaire distincts alors :

$$P(E) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

$$P(E) = \frac{\operatorname{card} E}{\operatorname{card} \Omega}.$$

Réalisation d'un événement :

* $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$; * $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

* $A \setminus B = A - B = A \cap \complement B = A \cap \bar{B}$.

escp :

" jet un dé " $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

* E_1 = " obtenir un chiffre pair ".

$E_1 = \{2, 4, 6\}$.

* E_2 = " obtenir un chiffre ≤ 5 ".

$E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$P(E_1) = \frac{\operatorname{card}(E_1)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{P(2) + P(4) + P(6)}{P(1) + P(2) + \cdots P(6)}$$

$$\frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

de même

$$P(E_2) = \frac{5}{6}$$

Définition _ Une probabilité P est une application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeurs dans $[0, 1]$.

$$P = \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1].$$

vérifiant les axiomes suivants :

1/ $P(\Omega) = 1$

2/ $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) : A \cap B = \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3/ pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements : $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Proposition :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité alors.

$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1/ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2/ $P(\emptyset) = 0$.

3/ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

4/ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Preuve

1/ $\Omega = A \cup \bar{A}$ / $A \cap \bar{A} = 0$

$P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2/ $\bar{\Omega} = \phi \Rightarrow P(\phi) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

③ $A \subset B$ / $B = A \cup (B \cap \bar{A})$

$A \cap (B \cap \bar{A}) = \phi$.

$P(B) = P((A) \cup (B \cap \bar{A}))$

$= P(A) + P(B \cap \bar{A})$

$P(B \cap \bar{A}) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$

4/ $(A \cup B) = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$.

$$\begin{cases} (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = \phi \\ (A \cap B) \cap (B \cap \bar{A}) = \phi \\ (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap \bar{A}) = \phi \end{cases}$$

$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$ *.

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$.

$B = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ ..... ①

$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$.

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$ ... ②.

En remplaçant ① et ② dans *

$P(A \cup B) = P(A) - \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap B)} + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{\text{card}(A\cup B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A\cap B)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$= \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} + \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} - \frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{car}(\Omega)}.$$

$$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - P(A\cap B)$$

probabilité conditionnelle :

considerons l'exp suivant : le jet deux dés non truqués" Soit A l'événement : "la somme des points obtenue est au moins égale à 10".

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$.

$A = \{(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

1/ supposons que le 1er dé amené un 3 evenement B). l'exprimentateur face à une telle information sait que l'événement avoir au moins 10 est irrealisable.

Nous dirons que la probabilité de A sachant que B est realisé est nulle et nous écrivons

$$P(A/_B) = 0$$

2/ supposons maintenant que le 1er dé amène un 6 (événement c), l'experimentateur sait que pour avoir au moins un 10 il faut que le 2ème dé amène 4, 5 ou 6. Il aura donc 3 possibilité sur 6 nous écrivons

$$P(A/_C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Definition :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité non nulle $p(B) \neq 0$. Soit A un événement quelconque. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est realisé le nombre noté $p(A/B)$ définie par

$$P(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Revenons à l'exp précedent

$A = \{(4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

$B = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

$C = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$p(A/_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/6} = 0$$

$A \cap C = \{(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Remarque :

1/ Certain auteur utilisant la notation $P_B(A)$

2/ $P(A/B) \in [0,1]$ car $A \cap B \subset B$

$$\Rightarrow P(A\cap B) \leq P(B) \Rightarrow 0 \leq \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \leq 1.$$

3/ $\begin{cases} \text{si } A_1 \cap A_2 = \phi . \\ \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1/B) + P(A_2/B). \end{cases}$

$$P(A_1 \cup A_2 / B) = \frac{P[(A_1 \cup A_2)\cap B]}{P(B)}$$

$$= \frac{P[(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A_1\cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1\cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2\cap B)}{P(B)} = P(A_1/B) + P(A_2/B).$$

Remarque :

d'aprés la probabilité conditionnelle nous avons

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

$$= P(B/A) \cdot P(A) / P(A) \neq 0$$

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

Les formules des probalités totales :

Definition (partition d'un ensemble)

on dit que la suite $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'évènements constitue un partition de Ω si : [$(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un systeme complet
$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n = \Omega \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j \end{cases}$$

Proposition :

soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ constituant un systeme complet
$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

proposition :

soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ constituant un systeme complet
$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

exp : A et $\overline{A}$ constituent une partition de Ω
$$\begin{cases} A \cup \overline{A} = \Omega \\ A \cap \overline{A} = \emptyset \end{cases}$$
$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$$

theorème $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \dots, A_n$ une suite d'evenement constituent une partition de Ω ($P(A_i) \neq 0$), soit B un evenement quelconque :
$$P(B) = P(B/A_1)\,P(A_1) + P(B/A_2)\,P(A_2) + \dots + P(B/A_n)\,P(A_n)$$

$$B = B\cap(\Omega) = B\cap(A\cup\bar{A}) = (B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})$$

$$P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap\bar{A}) \quad / \quad (B\cap A)\cap(B\cap\bar{A}) = \phi$$

$$= P(B/A)\cdot P(A) + P(B/\bar{A})\, P(\bar{A}).$$

Preuve:

on a : $B = B\cap\Omega = B\cap(A_1\cup A_2 \ldots \cup A_n)$.

$$= (B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup \ldots (B\cap A_n).$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \ldots + P(B\cap A_n)$$

$$= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) \ldots + P(B/A_n)\, A_n.$$

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i).$$

Theoreme de Bayes :

soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé $/ A_1, A_2, \ldots, A_n$ une suite d'évènements constituent une partition de Ω $(P(A_i) \neq 0)$.

$\forall$ B un évènement quelconque :

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, i.$$

preuve :

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_j)\,P(A_j)}{\sum P(B/A_i)\,P(A_i)}$$

exemple

On veut apprécier la fiabilité d'un test de dépistage d'une maladie on recherche la probabilité d'être effectivement malade quand le test est positif on la note $P(M/T)$

On peut mesurer facilement en laboratoire :

* la probabilité que le test soit positif sur un sujet sain $P(T/\overline{M})$
* la probabilité que le test soit positif sur un sujet malade $P(T/M)$.

On suppose connaitre par ailleurs la fréquence de la maladie dans la population de reference.

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T/M)\, P(M)}{P(T/M)\, P(M) + P(T/\overline{M}) \cdot P(\overline{M})}$$

Remarque : $\Omega = A \cup \overline{A}$

$$\frac{P(B)}{P(B)} = 1 = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A) \cup P(B \cap \overline{A})}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} + \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = P(A/B) + P(\overline{A}/B)$$

$$\Rightarrow P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

L'évènements indépendants.

Définition :

Deux évènements A, B ($p(B) \neq 0$) sont dits indépendants si $P(A/B) = P(A)$

Proposition

Deux évènements sont indépendans si et seulement si : $P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Preuve :

$$P(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Définition : soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n évènement d'un même espace de probabilité ils sont dits indépendants SSi pour toute sous suite $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de $1, \ldots, n$.

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$$

Pour trois évènements A, B, C il faut :

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$$