guide_pharmacie@yahoo.fr

Université de Batna
Faculté de Médecine
Département de Pharmacie

2005/2006

Cours de Mathématiques

1ère Année Pharmacie

Chapitre II : Equations différentielles

D'après le cahier de :

I. Hadef

Created by: T. Djebaili

Chapitre II : Equations differentielles.

Introduction : Exp de malthus.

Dans cet exemple et le suivant : x designe le nombre d'individus de la population étudiée (population humaine, population bacterienne). On considère x comme un nombre réel.
L'hypotèse de base est que si $x(t)$ est la population à l'instant t, la population à l'instant $t+\Delta t$, où Δt est petit, vont :

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + K\, x(t)\, \Delta t \\ K = cte > 0 \end{cases}$$

Devisant par Δt et passant à la limite quand $\Delta t \to 0$ on obtient en designe par $x'(t)$ la derivée par rapport à l'equation $x'(t) = K x(t)$ une equation differentielle du 1^er^ ordre.

definition

On appele une equation differentielle du 1^er^ ordre, une equation de type : $F(x, y, y') = 0 \;\ldots (1)$ où y est une fonction inconnue.
Résoudre l'equation differentiel consiste à chercher toute les fonctions y dérivable en x verifiant cette equation.

* On appelle solution sur I (I intervalle sur $\mathbb{R}$) de l'équation (1) toute fonction : $y = I \to \mathbb{R}$
$x \to y(x)$

telle que : 1/ y est dérivable sur I
2/ $\forall x \in I, F(x, y(x), y'(x)) = 0$

exp :

Soit l'équation $\begin{cases} y' = Ky \\ K \neq 0 \end{cases}$

y est une fonction de x $\quad y' = y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = Ky$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = K\,dx \,/\, y \neq 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int K\,dx \Rightarrow \ln|y| + c_1 = Kx + c_2$$

$$\Rightarrow \ln|y| = Kx + c \quad / \; c = c_2 - c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{Kx+c} = e^{Kx} \cdot e^{c}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\pm e^{c}}_{\lambda} \cdot e^{Kx}$$

$$y = \lambda\, e^{Kx} \quad / \; \lambda = cte$$

Théorème : (existence et unicité) d'une solution satisfaisant une condition initiale :

Soit l'équation différentielle $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Il existe une solution et une seule y de l'équation (2) telle que la condition initiale $y(x_0) = y_0$ est vérifiée

exp : $\begin{cases} y' = k y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\qquad y = \lambda . e^{kx}$

$y(0) = \lambda e^{0} = \lambda = 2.$

La solution vérifiant la condition initiale est :

$y = 2 e^{kx}$

1. Équation différentielles linéaire du 1er ordre sans second membre :

Définition :

toute équation de la forme $y' = f(x)\, y$ --- (1) est appelée équation différentielles linéaires du 1er ordre sans second membre.

Résolution de l'équation :

$y' = f(x)\, y \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x)\, y.$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{y} = f(x)\, dx.$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x)\, dx$

$\ln|y| = \int f(x)\, dx + c$

$|y| = e^{\int f(x)\, dx + c} = e^{c} \cdot e^{\int f(x)\, dx}$

$y = \underbrace{\pm e^{c}}_{\lambda} \cdot e^{\int f(x)\, dx}$

$y = \lambda e^{\int f(x)\, dx}$ / $\int f(x)\, dx = F(x)$

$y = \lambda e^{F(x)}$

exp: Resoudre l'equation $y' - xy = 0 \Rightarrow y' = xy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\, dx$

$\Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow |y| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c}$

$\Rightarrow y = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$ / $\lambda = \pm e^{c}$

2 - équation différentielle linéaires du 1^er ordre avec le second membre :

Définition : toute équation de la forme :

$$y' = f(x)\,y + g(x)$$

est appelée équation différentielles linéaire du 1^er ordre avec le second membre.

Résolution de l'équation complète (avec le 2^nd membre)

$$y' = f(x)\,y + g(x) \quad \dots (2).$$

Théorème : la solution générale de (2) est donnée par $y = y_0 + Y$.

- y_0 est la solution générale de l'équation $y' = f(x)\,y$.
- Y est une solution particulière de l'équation $y' = f(x)\,y + g(x)$.

Résolution par la méthode de variation de la constante : $y' = f(x)\,y + g(x) \quad \dots (2)$

$$y' = f(x)\,y$$

$$y_0 = \lambda\, e^{F(x)}, \quad F(x) = \int f(x)\,d(x)$$

La forme générale de la solution de l'équation (2) est donnée par : $y = \lambda(x)\, e^{F(x)}$

$$\Rightarrow \lambda'(x)\, e^{F(x)} + \cancel{\lambda(x)\, f(x)\, e^{F(x)}} = y'$$
$$= \cancel{f(x)\cdot \lambda(x)\, e^{F(x)}} + g(x)$$

$$\lambda'(x) e^{F(x)} = g(x) \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{g(x)}{e^{F(x)}} = g(x) e^{-F(x)}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \int g(x) e^{-F(x)} dx + \beta$$

$$\Rightarrow y = \left[\int g(x) e^{-F(x)} dx + \beta \right] e^{F(x)}$$

$$y = \underbrace{\beta e^{F(x)}}_{y_0} + \underbrace{e^{F(x)} \int g(x) e^{-F(x)} dx}_{Y}$$

exp :

$$y' = \frac{2}{x} y + 1 \qquad \begin{cases} f(x) = \frac{2}{x} \\ g(x) = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

on resoudre ESSM : (equation sans 2nd membre).

$$y' = \frac{2}{x} y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c \Rightarrow \ln|y| = \ln x^2 + c$$

$$|y| = e^{\ln x^2 + c} = x^2 \cdot e^c \Rightarrow y_0 = \lambda x^2$$

on resoudre EASM, la solution generale est

$y = \lambda(x)\, x^2$ alors :

$\lambda'(x)\, x^2 + \cancel{2x\, \lambda(x)} = \cancel{\frac{2}{x}\, \lambda(x)\, x^2} + 1$

$\lambda'(x)\, x^2 = 1 \Rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{x^2}$.

$\lambda(x) = \int \frac{dx}{x^2} + \alpha$. / α = cte

$\lambda(x) = -\frac{1}{x} + \alpha$.

$y = \left[-\frac{1}{x} + \alpha \right] \cdot x^2 = \alpha x^2 - x$. $\alpha \in \mathbb{R}$

* Escemples d'autres equation differentielles (non lineaires)

1/ Equation à variable separable :

Ceux sont les équations de type $f(y)\, y' = g(x)$. fe ou f et g sont des fonctions continues sur I et J respectivement. Le principe de calcul est :

$$f(y)\, y' = g(x) \Leftrightarrow f(y) \frac{dy}{dx} = g(x).$$

$$\int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx + c.$$

escp : $(1 + x)\, y' = (1 + y^2)$

$$\frac{y'}{(1+y^2)} = \frac{1}{(1+x)} \quad x \neq -1.$$

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y^2} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x} + c \Rightarrow \arctan y = \ln|1+x| + c$$

$$\Rightarrow y = \tan\left[\ln|1+x| + c\right] / \ c \in \mathbb{R}$$

2/ Equations homogenès:

Une équation différentielle du 1^{er} ordre est dite homogène si elle s'écrit sous la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{-----} \quad (E)$$

où f est une fonction définie et sur certain intervalle

Résolution de (E) : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

La méthode consiste à remplacer la fonction inconnue y par une nouvelle fonction t définie

$t(x) = \frac{y(x)}{x} / x \neq 0$.

$y(x) = x\,t(x)$.

$y'(x) = t(x) + x\,t'(x) \ , \ \forall x$.

reportant dans (E) on obtient

$t(x) + x\,t'(x) = f(t)$.

$\Leftrightarrow f(t) - t = x\,t'(x)$.

$\Leftrightarrow \dfrac{t'(x)}{f(t)-t} = \dfrac{1}{x}$.

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x}$.

$\Leftrightarrow \ln|x| = \displaystyle\int \frac{dt}{f(t)-t} + c \,/\, c \in \mathbb{R}$.

exemple : $y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x} \;/\; y : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$t = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = x\,t$.

$\Rightarrow y' = t + x\,t' \Leftrightarrow t + x\,t' = e^{t} + t$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\,t'}{e^{t}} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{dt}{dx}\,e^{-t} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow dt\,e^{-t} = \dfrac{dx}{x}$

$\displaystyle\int e^{-t}\,dt = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$\Leftrightarrow -e^{-t} = \ln|x| + c$.

$e^{-t} = -[\ln|x| + c]$.

$-t = \ln|\ln|x| + c|$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

$t = -\ln|\ln x + c|$ $\qquad c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^*_+$

$$y = x \ln\left[\frac{1}{|\ln(x)+c|}\right]$$

3/ Equation de Bernoulli :

Il s'agit de :

$$\begin{cases} y' = f(x)\,y + g(x)\,y^{\alpha} \quad \dots (E) \\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolution :

$$y' = f(x)\,y + g(x)\,y^{\alpha}$$

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = f(x)\frac{y}{y^{\alpha}} + g(x) = f(x)\,z + g(x)$$

on effectue le changement de variable :

$$z = y^{1-\alpha}$$

$$z' = (1-\alpha)\,y^{1-\alpha-1}\,y' \Leftrightarrow z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\,z' = \frac{y'}{y^{\alpha}}$$

$$(1-\alpha)^{-1} z' = f(x)\,z + g(x)$$

$$z' = (1-\alpha)\,f(x)\,z + (1-\alpha)\,g(x)$$

$$z' = h(x)\,z + d(x)$$

exp : $x y' + y - x y^3 = 0 \quad / \ x \neq 0$

$$x y' = -y + x y^3 \Rightarrow y' = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{f(x)} y + \underbrace{1}_{g(x)} y^3$$

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{x}\frac{y}{y^3} + 1 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} = \frac{-1}{x}\underbrace{y^{-2}}_{z} + 1$$

$$z' = -2y^{-3}y' = -2\frac{y'}{y^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}z' \Rightarrow -\frac{1}{2}z' = \frac{-1}{x}z + 1$$

$\Rightarrow z' = \frac{2}{x}z - 2$ (equation linéaire du 1er ordre

$$z = F(x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pm 1}{\sqrt{F(x)}}$$

2 - Equations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constantes

Définition : Une équation différentielle linéaire du 2eme ordre à coefficient constante est une de la forme :

$$a y'' + b y' + c y = f(x) \quad \text{---} \quad (E)$$

$(a, b, c \in \mathbb{R} \, (a \neq 0))$

f est une fonction continue sur $(I \subset \mathbb{R})$

L'équation sans second membre associé à (E) :

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

Proposition :

1/ pour $x \in I$ et $(\alpha, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} a y'' + b y' + c y = f(x) \\ y(x_0) = \alpha = y_0 \, , \, y'(x_0) = B = y'_0 \end{cases}$$

(E) admet une solution unique

2/ Si y_1, y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes ($y_1 \neq K y_2$) (non proportionnelles) de l'équation $a y'' + b y' + c y = 0$.

l'ensemble des solutions du système est donnée par :

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \; / \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Définition :

Si y_1 et y_2 ~~deux~~ solutions de ~~de~~ l'équation

$a y'' + b y' + c y = 0.$

On definie le wronskien :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

si $W(y_1, y_2) \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ sont linéairement indépendante

Résolution de l'équation sans second membre :

On cherche la solution sous la forme :

$y = e^{rx} / r \in \mathbb{R}$

donc $y' = r e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$.

$a y'' + b y' + c y = 0.$

$a r^2 e^{rx} + b r e^{rx} + c e^{rx} = 0.$

$e^{xr} [a r^2 + b r + c] = 0.$

$e^{rx} \neq 0$

$\Rightarrow a r^2 + b r + c = 0$ ~~(*)~~ est appelée équation caractéristique de [ESSM] d'ordre 2.

1/ $\Delta > 0$: $(*)$ admet 2 racines réelles r_1, r_2

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\[2ex] r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

la solution générale $= a y'' + b y' + c y = 0$

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2/ $\Delta = 0$ (*) admet une racine double.

$r = \frac{-b}{2a}$ la solution general:

$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

3/ $\Delta < 0$: (*) admet deux racines complexes conjuguée

$r_1 = \alpha + iB$; $r_2 = \alpha - iB$ / $B \neq 0$.

la solution générale.

$y = C_1 e^{\alpha x} \cos Bx + C_2 e^{\alpha x} \sin Bx$.

$C_1, C_2 \in R$.

exp:

$y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r_1 = +i$, $r_2 = -i$.

$y = C_1 e^{0x} \cos x + C_2 e^{0x} \sin x$

$= C_1 \cos x + C_2 \cos x$

Théorème :

La solution generale de l'equation $a y'' + b y' + c y = f(x)$ est : $y = y_0 + Y$.

y_0 est la solution generale de l'equation $a y'' + b y' + c y = 0$. Y est une solution particulière de $a y'' + b y' + c y = f(x)$

Méthode de variation des constantes :

$a y'' + b y' + c y = f(x) \ldots (E)$.

La solution générale de ESSM $\begin{cases} y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

On cherche une solution générale de (E) de la forme : $y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2$

c_1, c_2 verifiant : $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$.

Les fonctions c_1, c_2 sont les solution du système

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

exp : $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$

1/ Resoudre l'equation sans 2nd membre

$y'' + y = 0$.

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = r e^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 e^{xr} + e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(r^2 + 1)$

$r^2 + 1 = 0 \quad / \quad (e^{rx} \neq 0)$

$r^2 - (i^2) = (r - i)(r + i)$

$r_1 = -i \quad , \quad r_2 = i$

$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

2/ Resoudre EASM

$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$

$= c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ c_1'(-\sin x) + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\sin^3 x} \end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$c_1'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin^3} & -\sin \end{vmatrix}}{\Delta = 1} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

$c_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix}}{\Delta = 1} = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}.$

$c_1'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} \Rightarrow c_1(x) = \cotan(x) + \alpha.$

$c_2'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} \Rightarrow c_2(x) = -\dfrac{1}{2\sin^2 x} + \beta.$

La solution générale de l'équation :

$$y = \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \alpha\right)\cos x + \left(\frac{-1}{2\sin^3 x} + B\right)\sin x =$$

$$y = \alpha \cos x + B \sin x + \left[\frac{\cos^2 x}{\sin m} - \frac{1}{2\sin x}\right]$$

$\alpha, B \in \mathbb{R}$