Independance.

Définition:

soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilité, deux évènements A et B de cet espace sont dits independants lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

proposition: Si A et B sont independants, il en est de m pour les paires d'évenements A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$

variables aléatoires:

Exp 1. on lance une piece de monnaie 2 fois, les resultats possibles sont {PP, PF, FP et FF} on définit une variables X représentant le nbre de piles pobtenues. alors les valeurs de X sont. {0, 1 et 2}

Ex 2. on lance un dé jusqu'à l'obtention d'un 6 les résultats possibles sont $\{6, (1,6), (2,6) \cdots (5,6), (1,1,6) \cdots (5,5,6) \cdots\}$. on définit une variable X représentant le nbre de lancers necessaires jusqu'à l'obtention d'un 6, alors les valeurs possibles de X sont $\{1, 2, 3, \cdots\} = \infty$.

Définition:

soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on appelle variable aléatoire toute application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow X(w)$$

Variables aléatoires discretes (v.a.d).

Défi: la v.a.d X est dite discrete si elle prend nombre fini ou infini dénombrable de valeurs.

Notion: quand la V.a X prend la valeur x on écrit $\{X = x\}$
pour décrire l'évènement $\{w \in \Omega, X(w) = x\}$.
exp: Dans l'exemple 1 $X = 0$ correspond au cas où on n'a pas de piles c'est à dire $\{X = 0\} = \{FF\}$
de m $\{X = 1\} = \{PF, FP\}$ et $\{X = 2\} = \{PP\}$

Variable aléatoire discrètes (V.a.d)

- Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

défi:
soit X une V.a.d on appelle loi de probabilité ou fonction de masse de la V.a.d l'application:

$$P : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to P(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

propriétés

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$

$\sum_{x \in \mathbb{R}} P(x) = 1$

exp: on reprend l'exemple 1 on a

$P(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{FF\}) = \frac{1}{4}$

$P(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{PF, FP\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{1}{4}$

on décrit en général la loi sous la forme suivantes:

X	0	1	2	$\sum_{x=0}^{x=2} \mathbb{P}(x)$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

fonction de répartition:

déf: Soit X une V.a (discrète ou continue) on appelle fonction de répartition de la V.a. X, la fonction F_X définie par:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

Rem/- 1. si X est une V.a est discrète alors

$$F(x)(X) = \sum_{xi \leq x} \mathbb{P}(X = xi) = \sum_{xi \leq x} \mathbb{P}(X xi).$$

la fonction de répartition de permet de déterminer la loi de probabilité de la v.a. X en effet $\forall x_j \in X(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{i=1} \mathbb{P}(X) \leq$$

propriétés: $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 \leq F_X(x) \leq 1$ ($\lim x \to -\infty F_X(x) = 0$
$\lim x \to +\infty F_X(x) = 1$).

2). si $x \leq y$ alors $F_X(X) \leq F(X(Y))$.

3). F_X est une fonction continue à droite.

$\forall x \in \mathbb{R}_n \to 0_+ F_X(X_+ h) = F_X(X)$.

4). si $x < y$ alors $\mathbb{P}(x < X < y = F_X(Y) - F_X(X)$

exemple: on lance 3 dés on définit la v.a X comme le nbre de 6 obtenu la loi de probabilité de X est:

X	0	1	2	3	$\sum_{x=0}^{x=3} P(x)$
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{5^3}{6^3}$	$\frac{3 \times 5^2}{6^3}$	$\frac{3 \times 5}{6^3}$	$1/6^3$	1

$F_X(X) =$ 0 si $x < 0$.

$\frac{125}{216}$ si $0 \leq x < 1$.

$\frac{200}{216}$ si $1 \leq x < 2$

$\frac{215}{216}$ si $2 \leq x < 3$.

1 si $3 \leq x$.