① A8p9

TRIBUS On a $\Omega \neq \phi$, et $P(\Omega)$ ens des parties de Ω.
$\mathcal{A} \in P(\Omega)$

$\mathcal{A}$ tribu $\Leftrightarrow$ 1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

2) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$.

3) $\forall A_{n}; n\geq 1 \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

- $\phi \in \mathcal{A}$.
- $\bigcap_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
- Tribu engendrée par A $\mathcal{A} = \{\phi, \Omega, A, \bar{A}\}$.
- $A - B = A \setminus B \in \mathcal{A}$ $(A, B \in \mathcal{A})$.
- $A \Delta B \in \mathcal{A}$ $(A, B \in \mathcal{A})$.

Union (Somme) : A ou B ou les 2 à la fois. $(A+B = A \cup B)$

Intersection (Produit). Réalisation simultanée de tous les ev.

$A \cap A = A$, $A \cup A = A$

B even particulier de A $\Leftrightarrow$ $B \subset A$

$\Leftrightarrow$ $A + B = A$

$AB = B$.

PROBA ①

I. Phénomène

Exp. aléatoire : Le mécanisme qui permet d'observer le phénomène aléatoire.

Espace des épreuves : Ensemble des résultats possibles Ω.

$\Omega_1 = \{p, f\}$ (pour 1 pièce).

ou bien : ens. fondamental, esp. échantillon, évaise.

Evenement : $\{\omega\}$ even élementaire.

Ω even. certain.

ϕ Even. impossible.

II. Algebre des evennements :

Réalisation : Si $\omega \in A \Rightarrow A$ réalisé.

(A even. qq qui lit E).

Inclusion : ~~...~~ $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$

Egalité : $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.

Complémentaire : $\bar{A}$ (réalisé lorsque A ne l'est pas).

Différence : $A - B$. 

$\omega \in (A - B) \Leftrightarrow \omega \in A$ et $\omega \notin B$.

Différence symetrique : $A \Delta B$. (1 et 1 seul even réalisé).

$\omega \in (A \Delta B) \Leftrightarrow \omega \in (A - B) \cup (B - A)$. 

Incompatibles : (Disjoints / Naturellement exclusifs).

Réalisation de l'un exclut celle de l'autre

ou : $A \cap B = \phi$.

→ $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$.

Dém : on remplace $B\cup C$ par M.

→ $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$.

$P(A_1 A_2 \dots A_n) = \sum P(A_i) - \sum P(A_i \cup A_j) + \sum P(A_i + A_j + A_k) \dots \dots (-1)^{(n-1)}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$.

Th des proba. composées :

- A indépendant de B → $P(A)$ ne dépend pas de B.
- Prob conditionnelle de A relative à B = $P(A|B)$.

Si A indépendant de B ⇒ $P(A|B) = P(A)$.

- $P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$.

(Dém : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$).

→ A indépendant de B ⇒ B ne dépend pas de A.

(Dém : $P(A) = P(A|B)$ et $P(B) . P(A|B) = P(A) . P(B|A)$).

→ A, B indépendants si la réalisation de l'un ne change pas la probabilité de l'autre.

→ $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) . P(A_2|A_1) . P(A_3 / A_1 A_2) . \dots \dots P(A_n | A_1, A_2 \dots A_{n-1})$.

$P(A_1 \cap \dots A_n) = P(A_1) . P(A_2) . P(A_3) \dots P(A_n)$ (Si A_i indépendants)

②

III 1_ Introduction aux probabilités :

Espace probabilisable : Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$.

Ω : ens. fondamental pour $\mathcal{E}$.

$\mathcal{A}$: tribu pour $\mathcal{E}$.

Axiomes :

Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: $P : \mathcal{A} \to [0;1]$ / $P(\Omega) = 1$.

Pour tte suite d'ev : $P(\bigcup_0^\infty A_n) = \sum_0^\infty P(A_n)$ (2 à 2 disjoints)

Espace probabilisé : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

tq. $(\Omega, \mathcal{A})$ E.P et P mesure de probabilité.

Propriétés : On a : $(\Omega, \mathcal{A})$ prob. sur :

$P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, ~~$P(A) + P(\bar{A}) \leq 1$~~

~~$P(A) + P(\emptyset) \leq 1$~~,

$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$. $(\forall A, B \in \mathcal{A})$.

$A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ $(\forall A, B \in \mathcal{A})$.

Th's & Corollaires : (Th des prob. totales)

① $\left.\begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n) \end{array}\right]$ (evenements disjoints)

$\to$ Si $A_1 \ldots A_n$ forment 1 sys. complet d'ev. disjoints $\Rightarrow \sum P(A_i) = 1$.

$\to$ $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

② $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (ev. ne s'exclut pas nat.).

$\to$ $P(\sum_i A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \ldots$

$+ (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$.

III - INTRODUCTION aux STAT SIMPLES

Paramètres de position :

MODE : La valeur d'1 caractère d'effectif maximale. (Série discrète).

Classe modale (Série continue).

Une série peut être unimodale, bimodale, Multi..

MEDIANE : (caractéristique descriptive).

n_i : effectifs (fréquences absolues).

$f_i = \frac{n_i}{N}$ (fréquences relatives). $\sum f_i = 1$.

$N = 2p+1 \Rightarrow m_e = x_{p+1}$.
$N = 2p \Rightarrow m_e = (x_p + x_{p+1})/2$] discret

$m_e = a_i + \frac{b_i - a_i}{n_i}\left(N/2 - n_{i-1}^c\right)$
tq : $[a_i ; b_i]$ 1ère classe / $n_i^c \geqslant \frac{N}{2}$] Continu

$\sum n_i = N$, n_i^c : eff. cumulé $n_i^c = \sum_{k=1}^{i} n_k$.

MOYENNE ARITHMETIQUE : $\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i}$. (pondérée).

Si $n_i = 1 \Rightarrow \bar{x} = \sum x_i / N$. (simple).

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ (statique simple).

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. $X(w_1) \leqslant X(w_2) \leqslant \dots X(w_n)$.

3

TH de Thomas Bayes : (lorsque le hasard intervient 2 fois)

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i).P(A/A_i)}{\sum P(A_i)P(A/A_i)}.$$

(Dém : $P(A_i \backslash A) = \dfrac{P(A \cap A_i)}{P(A)}$ ①

$A = A \cap \Omega = A \cap (A_1 \cup A_2 \ldots)$.

$P(A) = \cancel{P(A)} \sum P(A_i) . P(A \backslash A_i)$ ②

$P(A \cap A_i) = P(A) . P(A_i \backslash A)$. ③ ③ et ② $\rightsquigarrow$ ①).

Étendue : $e = X_{max} - X_{min}$.

Amplitude : $a_i = x_{i+1} - x_i$.

$[q_1, q_3]$: Intervalle interquartile.

$q_3 - q_1$: L'écart interquartile.

Écart quadratique :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} |x_i - \bar{x}|\, n_i = \sum_{i=1}^{p} |x_i - \bar{x}|\, f_i .$$

Écart-type (Écart quadratique moyen) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 n_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 f_i} .$$

Variance : $V = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 f_i$.

$= \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$.

$x_i = \alpha \Rightarrow V(x) = 0$.

- Moyenne des écarts algébrique est nul : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})\, n_i = 0$.

Relation de Koenig Huygens :

$$\sigma^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} x_i^2 f_i}_{\text{m.s. d'o. 2}} - \underbrace{\bar{x}^2}_{\text{moment simple d'ordre 1}} .$$

(Dém : $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} (x_i - \bar{x})^2 n_i = \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i$

$= \sum (x_i^2 - 2\bar{x} x_i + \bar{x}^2) f_i = \sum x_i^2 f_i - \underbrace{\sum 2\bar{x} x_i f_i}_{2\bar{x}} + \bar{x}^2 \underbrace{\sum f_i}_{1}$

$= \sum x_i^2 f_i - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$

$= \underline{\hspace{3cm}}$.

④

Moyenne géometrique : $g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{p} x_i^{n_i}} = \prod_{i=1}^{p} x_i^{f_i}$
(x_i positifs).

Moyenne harmonique :
$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{f_i}{x_i}$$

Moyenne quadratique :
$$q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 n_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2 f_i}.$$

Classe $[a_i ; a_{i+1}[$, a_i : 1ère borne, a_{i+1} : 2ème borne.
$a_{i+1} - a_i$: Amplitude.
$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = c_i$: Centre.
$$\overline{a} = \frac{\sum c_i n_i}{\sum n_i}.$$

Paramètres de dispersion :
Quantiles : 1er quantile valeur correspondante à 25% en n_i^c.
3ème q $\rightarrow$ 75%.
- plus petite x_i tq : $n_i^c \geqslant \frac{N}{4}$ ou $\frac{3N}{4}$.
- $Q_k = a_i + \frac{b_i - a_i}{n_i}\left(\frac{kN}{4} - n_{i-1}^c\right) / k = 1, 2, 3$. (Continue)

Déciles : $k^{ème}$ décile $\rightarrow$ à $10k$ % des n_i^c.
Idem pour les centiles, Milliers.
$\frac{1}{100} \rightarrow k\%$ $\frac{1}{1000} \rightarrow 0{,}1k\%$.

et on peut utiliser les f_i cumulés.
$$q_k = (b_i - a_i) \times \left(\frac{\frac{100}{k} - 100 f_{i-1}}{100 f_i}\right) \text{ ou } \left(\frac{\frac{1}{k} - f_{i-1}}{f_i}\right).$$

5

Moment simple d'ordre k :

$$m_k = \sum x_i^k f_i = \frac{\sum x_i^k n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum x_i^k n_i}{N}.$$

$\Rightarrow m_1 = \sum x_i f_i$ (m. simple d'ordre 1).

$m_2 = \sum x_i^2 f_i$ (" " " 2).

Moment centré d'ordre k :

$$\mu_k = \sum (x_i - \bar{x})^k f_i = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^k n_i}{N}.$$

donc : $\sigma^2 = V = \mu_2$.

Formule de Koenig Huygens :

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 f_i - \bar{x}^2 = m_2 - m_1^2.$$

Écart arithmétique moyen :

$$E = \frac{1}{N} \cdot \sum_i |x_i - \bar{x}| n_i.$$