جامعة منتوري قسنطينة

هيكل الجذع المشترك العلوم الدقيقة"
التكنولوجيا والإعلام الآلي

MIAS 2008-2007

## إمتحان التحليل II

**التمرين 1:** مستعملا العبارة:

$$\lim_{\delta(\sigma)\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad \delta(\sigma) = \max_{k=1,2,\dots,n} (x_k - x_{k-1})$$

أحسب:

1) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{\cos\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}{\sin\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}$

2) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right), \quad b > a > 0$

**التمرين 2:** أحسب التكاملات:

1) $\displaystyle \int \frac{dx}{e^{2x} + e^{x} - 2}$, 2) $\displaystyle \int x e^{x} \cos x \, dx$

**التمرين 3:** حل المعادلات التفاضلية

1) $xy' + y = x^2 y^2$, 2) $y'' - 4y' + 4y = (x^2 - x)e^{2x}$

**التمرين 4:** معللا إجابتك: هل المعادلات التفاضلية

1 - $x^2 y' + y \operatorname{tg} x = y^5 + 3$ برنولي ؟

2 - $x^3 y' + y \cos x = y^2$ ريكاتي ؟

3 - $x^2 \cdot \sqrt{x}\, y' = x \cdot \sqrt{x}\, y + \sqrt{x}\, y^2$ متجانسة ؟

4 - $x^2 \cdot \sqrt{x}\, y' = y + 5$ خطية "

5 - هل كل تابع رتيب تماما على المجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ قابل للمكاملة حسب ريمان ؟

بالتوفيق

الحل :

1) من أجل التجزئة $\sigma=\left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\left(\frac{b-a}{n}\right), \dots, a+(n-1)\left(\frac{b-a}{n}\right), b\right\}$ 0,25

$$\delta(\sigma)=\max_{k=1,2,\dots,n}(x_k-x_{k-1})=\max_{k=1,2,\dots,n}\left(\frac{b-a}{n}\right)=\frac{b-a}{n} \quad 0{,}25$$

من أجل $a=0$ و $b=1$ فإن $\delta(\sigma)=\frac{1}{n}$ 0,25 وعندما $n$ ينتهي إلى $+\infty$ فإن $\delta(\sigma)$ 0,25 تؤول إلى $(0)$ وعليه: ~~0,25~~

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}{\sin\left(1+\frac{k-1}{n}\right)}=\int_0^1\frac{\cos(1+x)}{\sin(1+x)}dx=\ln\sin(1+x)\Big|_0^1$$

$$=\ln\sin 2-\ln\sin 1 \quad 1{,}5$$

2) من أجل التجزئة: $b>a>0$: $\sigma=\left\{a, a\sqrt[n]{\frac{b}{a}}, a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^2, \dots, a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{n-1}, b\right\}$ 0,25

فإنه

$$x_k-x_{k-1}=a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{k-1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$$

و

$$\delta(\sigma)=\max_{k=1,2,\dots,n}(x_k-x_{k-1})=a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{n-1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right) \quad 0{,}25$$

وعندما $n$ تسعى إلى $+\infty$ فإنه 0,25 $\delta(\sigma)$ تسعى إلى $0$ وعليه

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{k-1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\times\frac{1}{a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{k-1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right) \Rightarrow \quad 0{,}25$$

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)=\int_a^b\frac{dx}{x}=\ln b-\ln a \quad 1{,}5$$

تمرين 2 :

1) بما أن :

$$\frac{1}{e^{2x}+e^{x}-1}=\frac{1}{(e^{x}+2)(e^{x}-1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}+2}-\frac{e^{x}-2}{e^{x}-1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{e^{x}+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{e^{x}}{e^{x}+2}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}+\frac{1}{e^{x}+2}+\frac{2}{e^{x}-1}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{e^{x}}{e^{x}+2}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{1}{2}\times\frac{-2e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\frac{2e^{-x}}{1-e^{-x}}\right]$$

وبالتكامل نجد

$$\int\frac{dx}{e^{2x}+e^{x}-1}=\frac{1}{3}\left[\int\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+2}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\frac{1}{2}\times\frac{-2e^{-x}}{1+2e^{-x}}+\frac{2e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\ln(e^{x}+2)-\ln|e^{x}-1|-\frac{1}{2}\ln(1+2e^{-x})+2\ln|1-e^{-x}|\right]+c$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln(e^{x}+2)+\ln|e^{x}-1|+\frac{1}{2}\ln e^{x}-2\ln e^{x}\right]+c$$

$$=\frac{1}{6}\ln(e^{x}+2)+\frac{1}{3}\ln|e^{x}-1|-\frac{x}{2}+c \quad 2$$

2) بما أن :

$$\int e^{x}\sin x\,dx=\frac{e^{x}(\sin x-\cos x)}{2} \quad 0{,}75$$

و

$$\int e^{x}\cos x\,dx=\frac{e^{x}}{2}(\cos x+\sin x) \quad 0{,}75$$

فإن

$$\int xe^{x}\cos x\,dx=x\frac{e^{x}}{2}(\cos x+\sin x)-\int\frac{e^{x}}{2}(\cos x+\sin x)dx$$

$$=x\frac{e^{x}}{2}(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{x}}{2}\{\cos x+\sin x+\sin x-\cos x\}\right]$$

$$=\frac{e^{x}}{2}\left[x(\cos x+\sin x)-\sin x\right] \quad 1{,}5$$

تمرين 3 : 1)

$xy'+y=x^2y^2$ هي معادلة برنولي $0{,}25$

نضع $p=2$ و $z=y^{1-p}=y^{1-2}=\frac{1}{y}$ $0{,}25$

ومنه نجد:

$$xz'+(1-p)z=(1-p)x^2$$

أي

$$xz'-z=x^2 \quad 0{,}25$$

وهي معادلة خطية وعليه فإن:

$x \neq 0 \quad A(x) = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|x|$ (0,25) + (0,25)

و

$$B(x) = \int f(t) e^{A(t)} dt = \int -t\, e^{-\ln|t|} dt$$

$$= \int -\frac{t}{|t|} dt = \frac{-x}{|x|} \int dt = \left(-\frac{x^2}{|x|} + k\right)$$ (0,25) + (0,25)

ومنه فإن:

(0,25) + (0,25)

$$z = B(x) e^{-A(x)} = \left(-\frac{x^2}{|x|} + k\right) e^{\ln|x|} = -x^2 + k|x| \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{-x^2 + k|x|}$$ (0,25)

2- حل المعادلة المتجانسة هو $\Delta = 0 \vee r_1 = r_2 = 2$ (0,25)

ومنه $y_1 = e^{2x}$ و $y_2 = x e^{2x}$

(0,25) (0,25)

ومنه $W(y_1, y_2) = y_1^2 = e^{4x}$ (0,25)

$$c_1 = \int \frac{-y_2 f(t)\, dt}{W(y_1, y_2)} = \int \frac{-t e^{2t}(t^2 - t) e^{2t}}{e^{4t}} dt = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2}$$ (0,5)

و

$$c_2 = \int \frac{y_1 f(t)\, dt}{W(y_1, y_2)} = \int \frac{e^{2t}(t^2 - t) e^{2t}}{e^{4t}} dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$ (0,5)

وعليه فإن الحل الخاص هو:

$$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right) e^{2x} + x e^{2x}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6}\right) e^{2x}$$ (0,5)

والحل العام هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + y_p = e^{2x}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + c_1 + c_2 x\right)$$ (0,5)

تمرين 4

1 - ليست معادلة "برنولي" لأنها ليست من الشكل:

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)\,y^{p},\ (1)\quad p \neq 0,\ p \neq 1,\ \forall x,\ a(x) \neq 0,\ c(x) \neq 0$$

2 - ليست معادلة ريكاتي لانها ليست من الشكل:

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)\,y^2 + d(x) : \forall x \in I : a(x) \neq 0,\ c(x) \neq 0,\ d(x) \neq 0 \quad (1)$$

3 - نعم هي معادلة متجانسة لانها من الشكل $y' = f\left(\frac{y}{x}\right), x \neq 0$

بالفعل:

$$y' = \frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}\,y + \frac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}\,y^2 = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad (1)$$

4 - نعم هي معادلة "خطية" لانها من الشكل:

$$(1)\quad a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x),\ \forall x \in I,\ a(x) \neq 0$$

5 - نظرية (مع ذكر النص) (1)

ملاحظة: خاصة بالسؤال الاول تمرين 2 يمكن ايضا أن نستعمل:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^{x} - 1} = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{e^{x}-1} - \frac{1}{e^{x}+2} \right) dx = \frac{1}{3} \int \left( \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-x}}{2(1+2e^{-x})} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|1 - e^{-x}| + \frac{1}{6} \ln(1 + 2e^{-x}) + c$$

$$= \frac{1}{3} \ln|e^{x} - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^{x}+2) - \frac{1}{3} \ln e^{x} - \frac{1}{6} \ln e^{x} + c$$

$$= \frac{1}{3} \ln|e^{x} - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^{x}+2) - \frac{x}{2} + c$$

ويمكن ايضا استعمال طريقة تغيير المتغير وذلك بوضع

$t = e^{x}$ ومنه $x = \ln t$ و $dx = \frac{dt}{t}$