

جامعة منسوري قسنطينة

كلية العلوم - هيكل الجدع المشترك للعلوم الدقيقة

التكنولوجيا والإعلام الآلي

الامتحان الفصلي ثالثي 2008

التحليل I MIAS

التمرين 1

1- إذا كان $Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2\cos n \arg Z$ فلن $\bar{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} = 2\cos \arg Z$ لماذا؟

2- إذا كان $\arg Z' = \arg Z$ فلن $Z' = \frac{Z}{1+|Z|}$ لماذا؟

3- إذا كان $\frac{1+ia}{1-ia} = \cos \theta - i \sin \theta$ فلن $a = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, $a \in IR$ لماذا؟

4- إذا كانت المتسلسلة العددية $(u_n)_{n \in N}$ متباينة ومحددة من الأدنى فلنها متسلسلة محددة.

5- إذا كانت المتسلسلة العددية $(u_n + v_n)_{n \in N}$ متقاربة وكانت المتسلسلة $(v_n)_{n \in N}$ متقاربة فلن المتسلسلتين $(u_n)_{n \in N}$ و $(v_n)_{n \in N}$ متقاربتان لماذا؟

6- إذا كانت $A = \left\{ \frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{n}, p, q, n \in N^* \right\}$ فلن محددة من الأعلى بـ 2,5 لماذا؟

التمرين 2

1- إذا كانت $A = \left\{ (-1)^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in N^* \right\}$ ارجد حدتها الأعلى وحدتها الأدنى.

2- إذا كان $0 < \operatorname{Im} Z < 0$ فلن: $\operatorname{Im} \frac{Z}{1+Z^2} > 0$ (إذا وقظ فإذا كان $1 < |Z|$)

التمرين 3

لتكن المتسلسلة العددية $(u_n)_{n \in N}$ المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل $n \in N$

$$u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

1- لتكن f المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$$

(a) يبرهن أنه إذا كان $x \geq 1$ فلن $f(x) \geq 1$

(b) أثبت أنه من أجل $n \in N$, u_n موجودة و $1 \leq u_n \leq 2$

يتباع ... / ...

2- إذا كانت المتسلسلة $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة، كيف تكون نهايتها؟

3- أثبت أن المتسلسلة محدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$.

4- حدد اتجاه تغير المتسلسلة $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. لماذا تستنتج؟

5- لتكن للمتسلسلة العددية $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة من أجل $n \in \mathbb{N}$ بـ

$$v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

a) أثبت أن $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ متسلسلة هندسية عين حدتها الأولى وأسلسها.

b) اكتب $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ و $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة n . لوجد طبيعة المتسلسلة $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

بالنحو الآتي

التعريف 1

1- نعلم أن

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= |\bar{Z}|(\cos \arg \bar{Z} + i \sin \arg \bar{Z}) = |Z|(\cos(-\arg Z) + i \sin(-\arg Z)) \\ &= |Z|(\cos(\arg Z) - i \sin(\arg Z)) \wedge \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\cos(\arg Z) + i \sin(\arg Z)}{|Z|} \\ \wedge \bar{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} &= \left(|Z| + \frac{1}{|Z|} \right) \cos(\arg Z) + i \left(|Z| - \frac{1}{|Z|} \right) \sin(\arg Z) = 2 \cos \arg Z \rightarrow \\ \bar{Z} - \frac{1}{\bar{Z}} &= 0 \Rightarrow \frac{|\bar{Z}|^2 - 1}{|\bar{Z}|} = \frac{(|Z| - 1)(|Z| + 1)}{|Z|} = 0 \Rightarrow |Z| = 1 \end{aligned}$$

و عليه فإن

$$Z^n = \bar{Z}^n (\cos n \arg Z + i \sin n \arg Z) = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z$$

$$\wedge \frac{1}{Z^n} = \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$$

$$\Rightarrow Z^n + \frac{1}{Z^n} = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z + \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$$

$$= 2 \cos n \arg Z$$

2- نعلم أن

$$\cos \arg Z' = \frac{X'}{|Z'|} = \frac{1+|Z|}{|Z|} - \frac{X}{|Z|} = \cos \arg Z \quad \rightarrow \arg Z' = \arg Z$$

$$\sin \arg Z' = \frac{Y'}{|Z'|} = \frac{1+|Z|}{|Z|} - \frac{Y}{|Z|} = \sin \arg Z$$

3- لدينا

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+tg\frac{\theta}{2}}{1-tg\frac{\theta}{2}} - \frac{\left(1+tg\frac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(tg\frac{\theta}{2}\right)^2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(1 - \left(tg\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2tg\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

وتجزىء على أن هذه المساراة خاطئة

متقاربة تجاه ذلك أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_0$ أي محدودة من الأعلى وبما أنها

محدودة من الأسفل فهي أدنى محدودة

$$u_n = (-1)^n \wedge v_n = (-1)^{n+1}$$

$$\text{نعلم أن } \forall q, p, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{q} < 1, \frac{1}{p} \leq 1 \wedge \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} < 3$$

عنه أن $2,5$ ليس حد أعلى

التمرير 2

- بقى

$$A_1 = \left\{ -1 + \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2n+1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 < -1 + \frac{1}{2n+1} \leq 0 \Rightarrow \inf A_1 = -1 \wedge \sup A_1 = 0$$

$$A_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 2n \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 1 \Rightarrow \inf A_2 = \frac{1}{2} \wedge \sup A_2 = 1$$

$$\inf J = \min\{\inf A_1, \inf A_2\} = -1 \wedge \sup J = \max\{\sup A_1, \sup A_2\} = 1 < 3$$

لذلك J مغلقة

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X+iY}{1+Z^2} = \frac{X+iY}{1+(X^2+Y^2)} = \frac{X+iY}{(1+X^2+Y^2)^2-2iXY} \\ &= \frac{(X+iY)\times((1+X^2+Y^2)-2iXY)}{(1+X^2+Y^2)^2+4(XY)^2} \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{X((1+X^2+Y^2)+2XY^2)+iY((1+X^2+Y^2)-2XY^2)}{(1+X^2+Y^2)^2+4(XY)^2}$$

$$J_2 = \frac{X((1+X^2+Y^2)+2XY^2)+iY((1+X^2+Y^2)-2XY^2)}{(1+X^2+Y^2)^2+4(XY)^2}$$

$$(1-X^2-Y^2)Y > 0 \Leftrightarrow 1-X^2-Y^2 > 0 \quad (\text{أي})$$

التمرين 2

-1

$$(1) \quad x \geq 1 \Rightarrow 3+2x > 2+x > 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3+2x}{2+x} > 1 \quad (\text{ا})$$

(b) ولكن $u_1 = f(u_0) > 1$ وبما أن $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ لفرضنا فـ القضية

صحيحة من أجل n أي $u_n - f(u_{n-1}) > 1$ ومنها سبق فـ هي صحيحة من أجل $n+1$ والتي

يعني أن

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1 \quad \text{ موجودة و } \forall n \in \mathbb{N}, u_n$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad l = f(l) = \frac{3+2l}{2+l}, l > 1 \Rightarrow l^2 = 3 \Rightarrow l = \sqrt{3} \quad \text{فـ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l, l \in \mathbb{R} - 2$$

الثاني مرفوض.

3- نستعمل التراجع من أجل $n=0$ فـ $\sqrt{3} < 1 < u_0$ لفرض صحتها من أجل n أي

$$u_n < \sqrt{3} \quad \text{وـ يـ بـرهـنـ صـحـتـهاـ مـنـ أـجـلـ n+2ـ بـالـتـعـلـ}$$

$$(3) \quad u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3+2u_n}{2+u_n} - \sqrt{3} = \frac{3+2\sqrt{3}+u_n(2-\sqrt{3})}{2+u_n} \leq \frac{3+2\sqrt{3}+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2+u_n} = 0$$

أي صحيحة.

-4

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3+2u_n}{2+u_n} - u_n = \frac{3+2u_n - 2u_n - u_n^2}{2+u_n} = \frac{3-u_n^2}{2+u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{2+u_n} \geq 0 \end{aligned}$$

أي المتسلسلة متزايدة ومحبودة من الأعلى فـ هي متزايدة.

-5

(a)

$$v_n = \frac{u_{n-1} - \sqrt{3}}{u_{n-1} + \sqrt{3}} = \frac{3+2u_{n-2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}u_{n-2}}{3+2u_{n-2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}u_{n-2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+(2-\sqrt{3})u_{n-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)+(2+\sqrt{3})u_{n-2}}$$

$$\frac{(2-\sqrt{3})(u_{n+2}-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_{n+2}+\sqrt{3})} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)v_{n+1}$$

$$v_0 = \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \wedge r = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

و عليه فالـ

(b)

$$v_n = \frac{(2-\sqrt{3})(u_{n+2}-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_{n+2}+\sqrt{3})} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{(u_{n+3}-\sqrt{3})}{(u_{n+3}+\sqrt{3})} = \dots$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} \times \frac{(u_0-\sqrt{3})}{(u_0+\sqrt{3})} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+2}-\sqrt{3}}{u_{n+2}+\sqrt{3}} \Rightarrow v_{n+1}(u_{n+2}+\sqrt{3}) = u_{n+2}-\sqrt{3} \Rightarrow u_{n+2}(1-v_{n+1}) = \sqrt{3}(v_{n+1}-1)$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3}(v_{n+1}-1)}{1-v_{n+1}} = \frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) + 1\right)}{1 - \left(\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)\right)}$$

$\Rightarrow \lim u_n = \sqrt{3}$

وهذا يعني أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

جامعة منتوري قسنطينة

كلية العلوم- هيكل الجدع المشترك للعلوم الدقيقة

التكنولوجيا والإعلام الآلي

الامتحان الفصلي فبراير 2008

التحليل I MIAS

التمرين 1

1- إذا كان $Z^n + \frac{1}{Z^n} = 2\cos n \arg Z$ فإن $\bar{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} = 2\cos \arg Z$ لماذا؟

2- إذا كان $\arg Z' = \arg Z$ فإن $Z' = \frac{Z}{1+|Z|}$ لماذا؟

3- إذا كان $\frac{1+ia}{1-ia} = \cos \theta - i \sin \theta$ فإن $a = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ لماذا؟

4- إذا كانت المتسلسلة العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متاقصة ومحددة من الأدنى فيتها متسلسلة محددة.

5- إذا كانت المتسلسلة العددية $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وكانت المتسلسلة $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة في المتسلسلتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربتان لماذا؟

6- إذا كانت $A = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{n}, p, q, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ محددة من الأعلى بـ 2,5 لماذا؟

التمرين 2

1- إذا كانت $A = \left\{ (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ اوجد حدتها الأعلى وحدتها الأدنى.

2- إذا كان $0 < \operatorname{Im} Z < 1$ فإن $\operatorname{Im} \frac{Z}{1+Z^2}$ إذا وفقط إذا كان $|Z|$

التمرين 3

لتكن المتسلسلة العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

1- لتكن f المعرفة بـ $f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$

(a) برهن أنه إذا كان $x \geq 1$ فإن $f(x) \geq 1$

(b) أثبت أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$, u_n موجودة و $u_n \geq 1$

يتباع ... / ..

2- إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة، كيف تكون نهايتها؟

3- أثبت أن المتتالية محددة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$

4- حدد اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. لماذا تستنتج؟

5- لنكن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة من أجل $n \in \mathbb{N}$ بـ

$$v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

a) أثبت أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية عين حدتها الأول وأصلها.

b) أكتب $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بدلالة n . أوجد طبيعة المتتالية

بالطريقة

التمرين 1
1- نعلم أن

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= |\bar{Z}| \left(\cos \arg \bar{Z} + i \sin \arg \bar{Z} \right) = |Z| \left(\cos(-\arg Z) + i \sin(-\arg Z) \right) \\ &= |Z| \left(\cos(\arg Z) - i \sin(\arg Z) \right) \wedge \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\cos(\arg Z) + i \sin(\arg Z)}{|Z|} \\ \wedge \bar{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} &= \left(|Z| + \frac{1}{|Z|} \right) \cos(\arg Z) - i \left(|Z| - \frac{1}{|Z|} \right) \sin(\arg Z) = 2 \cos \arg Z \Rightarrow \\ |Z| - \frac{1}{|Z|} &= 0 \Rightarrow \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|} = \frac{(|Z| - 1)(|Z| + 1)}{|Z|} = 0 \Rightarrow |Z| = 1\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$Z^n = |Z|^n \left(\cos n \arg Z + i \sin n \arg Z \right) = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z$$

$$\wedge \frac{1}{Z^n} = \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$$

$$\Rightarrow Z^n + \frac{1}{Z^n} = \cos n \arg Z + i \sin n \arg Z + \cos n \arg Z - i \sin n \arg Z$$

$$= 2 \cos n \arg Z$$

2- نعلم أن

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \arg Z' = \frac{X'}{|Z'|} = \frac{\frac{X}{1+|Z|}}{\frac{|Z|}{1+|Z|}} = \frac{X}{|Z|} = \cos \arg Z \\ \sin \arg Z' = \frac{Y'}{|Z'|} = \frac{\frac{Y}{1+|Z|}}{\frac{|Z|}{1+|Z|}} = \frac{Y}{|Z|} = \sin \arg Z \end{array} \right. \Rightarrow \arg Z' = \arg Z$$

لدينا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+itg \frac{\theta}{2}}{1-itg \frac{\theta}{2}} = \frac{\left(1+itg \frac{\theta}{2} \right)^2}{1+\left(tg \frac{\theta}{2} \right)^2} = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \left(1 - \left(tg \frac{\theta}{2} \right)^2 + 2itg \frac{\theta}{2} \right) \\ = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 + 2i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \cos \theta + i \sin \theta \end{array} \right.$$

يتجزأ عنه أن هذه المساواة خطأ.

متافقية تعني بذلك أن $\forall n \in IN: u_n \leq u_0$ أي محدودة من الأعلى وبما أنها

محدودة من الأدنى فهي إذن محدودة.

$$u_n = (-1)^n \wedge v_n = (-1)^{n+1}$$

6- نعلم أن: $\forall q, p, n \in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q} \leq 1, \frac{1}{p} \leq 1 \wedge \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \leq 3$
عنه أن 2,5 ليس حد أعلى.

التمرین 2

- نضع

$$A_1 = \left\{ -1 + \frac{1}{2n-1}, n \in IN^* \right\} \Rightarrow \forall n \in IN^*, 2n-1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n-1} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 < -1 + \frac{1}{2n-1} \leq 0 \Rightarrow \inf A_1 = -1 \wedge \sup A_1 = 0$$

لذلك

$$A_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{2n}, n \in IN^* \right\} \Rightarrow \forall n \in IN^*, 2n \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2n} < 1 \Rightarrow \inf A_2 = \frac{1}{2} \wedge \sup A_2 = 1$$

$$\inf A = \min\{\inf A_1, \inf A_2\} = -1 \wedge \sup A = \max\{\sup A_1, \sup A_2\} = 1$$

بما أن:

$$\begin{aligned} \frac{Z}{1+Z^2} &= \frac{X+iY}{1+(X+iY)} = \frac{X+iY}{1+X^2-Y^2+2XY} \\ &= \frac{(X+iY) \times ((1+X^2-Y^2)-2XY)}{(1+X^2-Y^2)^2+4(XY)^2} \\ &= \frac{X(1+X^2-Y^2)+2XY^2+iY((1+X^2-Y^2)-2XY)}{(1+X^2-Y^2)^2+4(XY)^2} \\ &= \frac{X(1+X^2-Y^2)+2XY^2+iY(1-X^2-Y^2)}{(1+X^2-Y^2)^2+4(XY)^2} \\ &\quad (1-X^2-Y^2)Y > 0 \Leftrightarrow 1-X^2-Y^2 > 0 \text{ أي:} \end{aligned}$$

التمرين 2

-1

$$\textcircled{1} \quad x \geq 1 \Rightarrow 3 + 2x > 2 + x > 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3+2x}{2+x} > 1 \quad (\text{a})$$

(b) ولكن $u_1 = f(u_0) > 1$ وبما أن $\forall n \in IN, u_{n+1} = f(u_n)$ لفرض أن القضية

صحيحة من أجل n أي $u_n = f(u_{n-1}) > 1$ ومنها سبق فهي صحيحة من أجل $n+1$ والذي

يعني أن

$$\forall n \in IN, u_n > 1 \quad \text{موجودة و } \forall n \in IN, u_n$$

$$\textcircled{1} \quad I = f(I) = \frac{3+2I}{2+I}, I > 1 \Rightarrow I^2 = 3 \Rightarrow I = \sqrt{3} \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = I, I \in IR - 2$$

الثاني مرفوض.

-3- نستعمل التراجع من أجل $n=0$ فإن $u_0 = \sqrt{3} < 1$ لفرض صحتها من أجل n أي

$$u_n \leq \sqrt{3} \quad \text{ونبرهن صحتها من أجل } n+1 \text{ بالفعل:}$$

$$\left\{ u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3+2u_n}{2+u_n} - \sqrt{3} = \frac{3-2\sqrt{3} + u_n(2-\sqrt{3})}{2+u_n} \leq \frac{3-2\sqrt{3} + \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2+u_n} = 0 \right.$$

أي صحيحة.

-4

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3+2u_n}{2+u_n} - u_n = \frac{3+2u_n - 2u_n - u_n^2}{2+u_n} = \frac{3-u_n^2}{2+u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{2+u_n} \geq 0 \end{aligned}$$

أي المتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

-5

(a)

$$\left\{ v_n = \frac{u_{n-1} - \sqrt{3}}{u_{n-1} + \sqrt{3}} = \frac{3+2u_{n-2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}u_{n-2}}{3+2u_{n-2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}u_{n-2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+(2-\sqrt{3})u_{n-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)+(2+\sqrt{3})u_{n-2}} \right.$$

$$v_0 = \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \wedge r = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

و عليه فإن

(b)

$$v_n = \frac{u_{n-2} - \sqrt{3}}{u_{n-2} + \sqrt{3}} = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^2 \times \frac{u_{n-3} - \sqrt{3}}{u_{n-3} + \sqrt{3}} = \dots$$

$$= \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^{n-1} \times \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^{n-1} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \Rightarrow v_{n+1}(u_n + \sqrt{3}) = u_n - \sqrt{3} \Rightarrow u_n(1 - v_{n+1}) = \sqrt{3}(v_{n+1} + 1)$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3}(v_{n+1} + 1)}{1 - v_{n+1}} = \frac{\sqrt{3} \left(\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^n \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + 1 \right)}{1 - \left(\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^n \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)}$$

و هذا يعني أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.