جـــامعة منتوري قسنطينــة

كلية العلوم- هيكل الجذع المشترك للعلوم الدقيقة

التكنولوجيا والإعلام الآلي

التحليل MIAS I — الامتحان الفصلي فيفري 2008

التمرين1

1- إذا كان $\overline{Z}+\frac{1}{\overline{Z}}=2\cos\arg Z$ فإن $Z^{n}+\frac{1}{Z^{n}}=2\cos n\arg Z$ لماذا؟

2- إذا كان $Z'=\frac{Z}{1+|Z|}$ فإن $\arg Z'=\arg Z$ لماذا؟

3- إذا كان $a\in IR$ و $a=tg\frac{\theta}{2}$ فإن $\frac{1+ia}{1-ia}=\cos\theta-i\sin\theta$ لماذا؟

4- إذا كانت المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فإنها متتالية محدودة.

5- إذا كانت المتتالية العددية $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وكانت المتتالية $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
متقاربة فإن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان لماذا؟

6- إذا كانت $A=\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{n},\ p,q,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ فإن محدودة من الأعلى بـ 2,5 لماذا؟

التمرين2

1- إذا كانت $A=\left\{(-1)^{n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ أوجد حدها الأعلى وحدها الأدنى.

2- إذا كان $\operatorname{Im}Z>0$ فإن: $\operatorname{Im}\frac{Z}{1+Z^{2}}>0$ إذا وفقط إذا كان $|Z|<1$.

التمرين3

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

1- لتكن f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{3+2x}{2+x}$

a) برهن أنه إذا كان $x\geq 1$ فإن $f(x)\geq 1$

b) اثبت أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$، u_n موجودة و $u_n\geq 1$

يتبع .../..

2ـ إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة، كيف تكون نهايتها؟

3ـ أثبت أن المتتالية محدودة من الأعلى بـ: $\sqrt{3}$.

4ـ حدد اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in N}$. ماذا تستنتج؟

5ـ لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة من أجل $n \in N$ بـ: $v_{n+1} = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) أثبت أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية عين حدها الأول وأساسها.

b) أكتب $(u_n)_{n\in N}$ و $(v_n)_{n\in N}$ بدلالة n. أوجد طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$

بالتوفيق

التمرين 1

1- نعلم أن

$$\overline{Z} = |\overline{Z}|\left(\cos\arg\overline{Z} + i\sin\arg\overline{Z}\right) = |Z|\left(\cos(-\arg Z) + i\sin(-\arg Z)\right)$$

$$= |Z|\left(\cos(\arg Z) - i\sin(\arg Z)\right) \wedge \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{\cos(\arg Z) + i\sin(\arg Z)}{|Z|}$$

$$\wedge\, Z + \frac{1}{\overline{Z}} = \left(|Z| + \frac{1}{|Z|}\right)\cos(\arg Z) + i\left(|Z| - \frac{1}{|Z|}\right)\sin(\arg Z) = 2\cos\arg Z \Rightarrow$$

$$|Z| - \frac{1}{|Z|} = 0 \Rightarrow \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|} = \frac{(|Z|-1)(|Z|+1)}{|Z|} = 0 \Rightarrow |Z| = 1$$

وعليه فإن

$$Z^n = |Z|^n\left(\cos n\arg Z + i\sin n\arg Z\right) = \cos n\arg Z + i\sin n\arg Z$$

$$\wedge\, \frac{1}{Z^n} = \cos n\arg Z - i\sin n\arg Z$$

$$\Rightarrow Z^n + \frac{1}{Z^n} = \cos n\arg Z + i\sin n\arg Z + \cos n\arg Z - i\sin n\arg Z$$

$$= 2\cos n\arg Z$$

2- نعلم أن

$$\begin{cases} \cos\arg Z' = \dfrac{X'}{|Z'|} = \dfrac{\dfrac{X}{1+|Z|}}{\dfrac{|Z|}{1+|Z|}} = \dfrac{X}{|Z|} = \cos\arg Z \\ \\ \sin\arg Z' = \dfrac{Y'}{|Z'|} = \dfrac{\dfrac{Y}{1+|Z|}}{\dfrac{|Z|}{1+|Z|}} = \dfrac{Y}{|Z|} = \sin\arg Z \end{cases} \Rightarrow \arg Z' = \arg Z$$

3- لدينا:

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+itg\dfrac{\theta}{2}}{1-itg\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\left(1+itg\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(tg\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(1-\left(tg\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2itg\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ينتج عنه أن هذه المساواة خاطئة.

(1)

4- $(u_n)_{n\in IN}$ متناقصة تعني ذلك أن $\forall n\in IN; u_n \le u_0$ أي محدودة من الأعلى وبما أنها محدودة من الأدنى فهي إذن محدودة.

5- يكفي أخذ $u_n=(-1)^n \wedge v_n=(-1)^{n+1}$ (1)

6- نعلم أن: $\forall q,p,n\in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q}<1, \frac{1}{p}\le 1 \wedge \frac{1}{n}\le 1 \Rightarrow \frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}<3$ ينتج عنه أن 2،5 ليس حد أعلى. (1)

<u>**التمرين2**</u>

1- نضع

$$A_1=\left\{-1+\frac{1}{2n-1}, n\in IN^*\right\} \Rightarrow \forall n\in IN^*, 2n-1\ge 1 \Rightarrow 0<\frac{1}{2n-1}\le 1$$

$$\Rightarrow -1<-1+\frac{1}{2n-1}\le 0 \Rightarrow \inf A_1=-1 \wedge \sup A_1=0$$

و

$$A_2=\left\{1-\frac{1}{2n}, n\in IN^*\right\} \Rightarrow \forall n\in IN^*, 2n\ge 2 \Rightarrow 0<\frac{1}{2n}\le\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\le -\frac{1}{2n}<0$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2n}<1 \Rightarrow \inf A_2=\frac{1}{2} \wedge \sup A_2=1$$

2- $\inf A=\min\{\inf A_1, \inf A_2\}=-1 \wedge \sup A=\max\{\sup A_1, \sup A_2\}=1$

3- بما أن

$$A_1\left\{\begin{aligned}\frac{Z}{1+Z^2}&=\frac{X+iY}{1+(X+iY)^2}=\frac{X+iY}{1+X^2-Y^2+2iXY}\\&=\frac{(X+iY)\times\left(\left(1+X^2-Y^2\right)-2iXY\right)}{\left(1+X^2-Y^2\right)^2+4(XY)^2}\\&=\frac{X\left(1+X^2-Y^2\right)+2XY^2+iY\left(\left(1+X^2-Y^2\right)-2X^2\right)}{\left(1+X^2-Y^2\right)^2+4(XY)^2}\\&=\frac{X\left(1+X^2-Y^2\right)+2XY^2+iY\left(1-X^2-Y^2\right)}{\left(1+X^2-Y^2\right)^2+4(XY)^2}\end{aligned}\right.$$

أي: $\left(1-X^2-Y^2\right)Y>0 \Leftarrow 1-X^2-Y^2>0$

التمرين 2

-1

(a $x\ge 1 \Rightarrow 3+2x>2+x>3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3+2x}{2+x}>1$

(b ولكن $\forall n\in IN, u_{n+1}=f(u_n)$ وبما أن $u_1=f(u_0)>1$ لنفرض أن القضية صحيحة من أجل n أي $u_n=f(u_{n-1})>1$ ومنما سبق فهي صحيحة من أجل $n+1$ والتي يعني أن

$\forall n\in IN, u_n$ موجودة و $\forall n\in IN, u_n>1$

-2 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l, l\in IR$ فإن $l=f(l)=\dfrac{3+2l}{2+l}, l>1 \Rightarrow l^2=3 \Rightarrow l=\sqrt{3}$ لأن الحل الثاني مرفوض.

-3 نستعمل التراجع من أجل $n=0$ فإن $u_0=1<\sqrt{3}$ لنفرض صحتها من أجل n أي $u_n<\sqrt{3}$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ بالفعل:

$$u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}-\sqrt{3}=\frac{3-2\sqrt{3}+u_n(2-\sqrt{3})}{2+u_n}\le\frac{3-2\sqrt{3}+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2+u_n}=0$$

أي صحيحة.

-4

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3+2u_n}{2+u_n}-u_n=\frac{3+2u_n-2u_n-u_n^2}{2+u_n}=\frac{3-u_n^2}{2+u_n}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{2+u_n}\ge 0$$

أي المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

-5

(a

$$v_n=\frac{u_{n-1}-\sqrt{3}}{u_{n-1}+\sqrt{3}}=\frac{3+2u_{n-2}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}u_{n-2}}{3+2u_{n-2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}u_{n-2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+(2-\sqrt{3})u_{n-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)+(2+\sqrt{3})u_{n-2}}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(u_{n-2}-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_{n-2}+\sqrt{3})} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) v_{n-1}$$

وعليه فإن $v_0 = \frac{u_0-\sqrt{3}}{u_0+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \wedge r = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

(b

$$v_n = \frac{(2-\sqrt{3})(u_{n-2}-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(u_{n-2}+\sqrt{3})} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{(u_{n-3}-\sqrt{3})}{(u_{n-3}+\sqrt{3})} = \dots$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} \times \frac{(u_0-\sqrt{3})}{(u_0+\sqrt{3})} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} \times \frac{(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})}$$

و

$$v_{n-1} = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}} \Rightarrow v_{n-1}(u_n+\sqrt{3}) = u_n-\sqrt{3} \Rightarrow u_n(1-v_{n-1}) = \sqrt{3}(v_{n+1}-1)$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\sqrt{3}(v_{n-1}+1)}{(1-v_{n+1})} = \frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})}+1\right)}{\left(1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n \times \frac{(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$$

وهذا يعني ان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

جـــامعـة منـــتـــورى قـســنطيـنـــة

كلية العلوم- هيكل الجدع المشترك للعلوم الدقيقة

التكنولوجيا والإعلام الآلي

التحليل MIAS I الامتحان الفصلي فيفري 2008

التمرين1

1- إذا كان $\overline{Z}+\frac{1}{\overline{Z}}=2\cos\arg Z$ فإن $Z^n+\frac{1}{Z^n}=2\cos n\arg Z$ لماذا؟

2- إذا كان $Z'=\frac{Z}{1+|Z|}$ فإن $\arg Z'=\arg Z$ لماذا؟

3- إذا كان $a\in IR$ و $a=tg\frac{\theta}{2}$ فإن $\frac{1+ia}{1-ia}=\cos\theta-i\sin\theta$ لماذا؟

4- إذا كانت المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فإنها متتالية محدودة.

5- إذا كانت المتتالية العددية $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وكانت المتتالية $(u_n.v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة فإن المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربتان لماذا؟

6- إذا كانت $A=\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{n},\ p,q,n\in\mathbb{N}^*\right\}$ فإن محدودة من الأعلى بـ: 2,5 لماذا؟

التمرين2

1- إذا كانت $A=\left\{(-1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ أوجد حدها الأعلى وحدها الأدنى.

2- إذا كان $\operatorname{Im}Z>0$ فإن: $\operatorname{Im}\frac{Z}{1+Z^2}>0$ إذا وفقط إذا كان $|Z|<1$.

التمرين3

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}$$

1- لتكن f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{3+2x}{2+x}$

a) برهن أنه إذا كان $x\geq 1$ فإن $f(x)\geq 1$

b) أثبت أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$، u_n موجودة و $u_n\geq 1$

يتبع .../..

2ـ إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، كيف تكون نهايتها؟

3ـ أثبت أن المتتالية محدودة من الأعلى بـ: $\sqrt{3}$.

4ـ حدد اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ماذا تستنتج؟

5ـ لتكن المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة من أجل $n\in\mathbb{N}$ بـ: $v_{n+1}=\dfrac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$

a) أثبت أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية عين حدها الأول وأساسها.

b) أكتب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلالة n. أوجد طبيعة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

بالتوفيق

التحليل I   2008 MIAS   الحل

التمرين 1

1– نعلم أن

$$\overline{Z} = |\overline{Z}|\left(\cos\arg\overline{Z} + i\sin\arg\overline{Z}\right) = |Z|\left(\cos(-\arg Z) + i\sin(-\arg Z)\right)$$

$$= |Z|\left(\cos(\arg Z) - i\sin(\arg Z)\right) \wedge \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{\cos(\arg Z) + i\sin(\arg Z)}{|Z|}$$

$$\wedge\ \overline{Z} + \frac{1}{\overline{Z}} = \left(|Z| + \frac{1}{|Z|}\right)\cos(\arg Z) - i\left(|Z| - \frac{1}{|Z|}\right)\sin(\arg Z) = 2\cos\arg Z \Rightarrow$$

2,5

$$|Z| - \frac{1}{|Z|} = 0 \Rightarrow \frac{|Z|^2 - 1}{|Z|} = \frac{(|Z|-1)(|Z|+1)}{|Z|} = 0 \Rightarrow |Z| = 1$$

وعليه فإن

$$Z^n = |Z|^n\left(\cos n\arg Z + i\sin n\arg Z\right) = \cos n\arg Z + i\sin n\arg Z$$

$$\wedge\ \frac{1}{Z^n} = \cos n\arg Z - i\sin n\arg Z$$

$$\Rightarrow Z^n + \frac{1}{Z^n} = \cos n\arg Z + i\sin n\arg Z + \cos n\arg Z - i\sin n\arg Z$$

$$= 2\cos n\arg Z$$

2– نعلم أن

$$\begin{cases} \cos\arg Z' = \dfrac{X'}{|Z'|} = \dfrac{\dfrac{X}{1+|Z|}}{\dfrac{|Z|}{1+|Z|}} = \dfrac{X}{|Z|} = \cos\arg Z \\[2ex] \sin\arg Z' = \dfrac{Y'}{|Z'|} = \dfrac{\dfrac{Y}{1+|Z|}}{\dfrac{|Z|}{1+|Z|}} = \dfrac{Y}{|Z|} = \sin\arg Z \end{cases} \Rightarrow \arg Z' = \arg Z$$

1,5

3– لدينا:

$$\frac{1+ia}{1-ia} = \frac{1+itg\dfrac{\theta}{2}}{1-itg\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\left(1+itg\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(tg\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(1-\left(tg\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2itg\frac{\theta}{2}\right)$$

1,5

$$= \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ينتج عنه أن هده المساواة خاطئة.

(1)

4- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة نعني بذلك أن $\forall n\in IN: u_n\le u_0$ أي محدودة من الأعلى وبما أنها محدودة من الأدنى فهي إذن محدودة.

5- يكفي أخذ $u_n=(-1)^n \wedge v_n=(-1)^{n+1}$ (1,5)

6- نعلم أن: $\forall q,p,n\in IN^* \Rightarrow \frac{1}{q}\le 1, \frac{1}{p}\le 1\wedge \frac{1}{n}\le 1 \Rightarrow \frac{1}{q}+\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\le 3$ ينتج عنه أن 2،5 ليس حاد أعلى. (1)

التمرين2

1- نضع

$$A_1=\left\{-1+\frac{1}{2n-1}, n\in IN^*\right\}\Rightarrow \forall n\in IN^*, 2n-1\ge 1\Rightarrow 0<\frac{1}{2n-1}\le 1$$

$$\Rightarrow -1<-1+\frac{1}{2n-1}\le 0\Rightarrow \inf A_1=-1\wedge \sup A_1=0$$

0,5 0,5

و

$$A_2=\left\{1-\frac{1}{2n}, n\in IN^*\right\}\Rightarrow \forall n\in IN^*, 2n\ge 2\Rightarrow 0<\frac{1}{2n}\le\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le -\frac{1}{2n}<0$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2n}<1\Rightarrow \inf A_2=\frac{1}{2}\wedge \sup A_2=1$$

0,5 0,5 0,25

إذن $\inf A=\min\{\inf A_1, \inf A_2\}=-1\wedge \sup A=\max\{\sup A_1, \sup A_2\}=1$

0,25

2- بما أن:

$$\frac{Z}{1+Z^2}=\frac{X+iY}{1+(X+iY)}=\frac{X+iY}{1+X^2-Y^2+2iXY}$$

$$=\frac{(X+iY)\times\left(\left(1+X^2-Y^2\right)-2iXY\right)}{\left(1+X^2-Y^2\right)^2+4(XY)^2}$$

1,5

$$=\frac{X\left(1+X^2-Y^2\right)+2XY^2+iY\left(\left(1+X^2-Y^2\right)-2X^2\right)}{\left(1+X^2-Y^2\right)^2+4(XY)^2}$$

$$=\frac{X\left(1+X^2-Y^2\right)+2XY^2+iY\left(1-X^2-Y^2\right)}{\left(1+X^2-Y^2\right)^2+4(XY)^2}$$

أي: $\left(1-X^2-Y^2\right)Y>0\Leftrightarrow 1-X^2-Y^2>0$

التمرين 2

-1

0,5 $x \geq 1 \Rightarrow 3+2x > 2+x > 3 \Rightarrow f(x)=\dfrac{3+2x}{2+x} > 1$ (a

b) ولكن $\forall n \in IN, u_{n+1}=f(u_n)$ وبما أن $u_1=f(u_0)>1$ لنفرض أن القضية صحيحة من أجل n أي $u_n=f(u_{n-1})>1$ ومنما سبق فهي صحيحة من أجل $n+1$ والذي يعني أن

0,75

$\forall n \in IN, u_n$ موجودة و $\forall n \in IN, u_n > 1$

2- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l, l \in IR$ فإن $l=f(l)=\dfrac{3+2l}{2+l}, l>1 \Rightarrow l^2=3 \Rightarrow l=\sqrt{3}$ لأن الجذر الثاني مرفض. 1

3- نستعمل التراجع من أجل $n=0$ فإن $u_0=1<\sqrt{3}$ لنفرض صحتها من أجل n أي $u_n \leq \sqrt{3}$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ بالفعل:

1,5

$$u_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}-\sqrt{3}=\frac{3-2\sqrt{3}+u_n(2-\sqrt{3})}{2+u_n} \leq \frac{3-2\sqrt{3}+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2+u_n}=0$$

أي صحيحة.

-4

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3+2u_n}{2+u_n}-u_n=\frac{3+2u_n-2u_n-u_n^2}{2+u_n}=\frac{3-u_n^2}{2+u_n}$$

1,5

$$=\frac{(\sqrt{3}-u_n)(\sqrt{3}+u_n)}{2+u_n} \geq 0$$

أي المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

-5

(a

$$v_n=\frac{u_{n-1}-\sqrt{3}}{u_{n-1}+\sqrt{3}}=\frac{3+2u_{n-2}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}u_{n-2}}{3+2u_{n-2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}u_{n-2}}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+(2-\sqrt{3})u_{n-2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)+(2+\sqrt{3})u_{n-2}}$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(u_{n-2}-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(u_{n-2}+\sqrt{3}\right)}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)v_{n-1}$$

وعليه فإن $v_0=\frac{u_0-\sqrt{3}}{u_0+\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\wedge r=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

(b

$$v_n=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(u_{n-2}-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(u_{n-2}+\sqrt{3}\right)}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^2\times\frac{\left(u_{n-3}-\sqrt{3}\right)}{\left(u_{n-3}+\sqrt{3}\right)}=\dots$$

$$=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1}\times\frac{\left(u_0-\sqrt{3}\right)}{\left(u_0+\sqrt{3}\right)}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1}\times\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

و

$$v_{n+1}=\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}\Rightarrow v_{n+1}\left(u_n+\sqrt{3}\right)=u_n-\sqrt{3}\Rightarrow u_n\left(1-v_{n+1}\right)=\sqrt{3}\left(v_{n+1}+1\right)$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{\sqrt{3}\left(v_{n+1}+1\right)}{\left(1-v_{n+1}\right)}=\frac{\sqrt{3}\left(\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\times\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)}+1\right)}{\left(1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\times\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}.$$

وهذا يعني أن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.