Université Mentouri **Département SETI et LMD**

MIAS (Algèbre2)

Contrôle (mai 2008)

Exercice1 (8points)

Dans IR^3, on considère les vecteurs

$$a = (0,1,1), \qquad b = (0,1,-1), \qquad c = (2,3,4), \qquad d = (0,1,2)$$

1. Montrer que $\{a,b,c\}$ constitue une base de IR^3 et exprimer d dans cette dernière.
2. Si $F = [\{a,b\}]$ et $G = [\{c,d\}]$, calculer $\dim(F+G)$, $\dim(F \cap G)$ et choisir une base pour $F \cap G$.

Exercice2 (12 points)

Soit f, une application de IR^3 dans IR^3, définie par :

$$(\forall (x,y,z) \in IR^3) \quad f(x,y,z) = (x+y, y+z, z)$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f = IR^3$ et en déduire $Kerf$.
3. Soit $E = \{ u \in IR^3 / f(u) = u \}$, montrer que E est un sev de IR^3.
4. Définir un supplémentaire G de E par rapport à IR^3.
5. Soit g, l'application définie par.

$$(\forall u \in IR^3) \quad g(u) = f(u) - u$$

Calculer, pour tout $u \in IR^3$, $g^3(u) = (gogog)(u)$ et en déduire :

$$f^n(u) = \underbrace{fofo\cdots of}_{n \text{ fois}}(u) \quad (n \in IN)$$

(Indication : $(g + Id_{IR^3})^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p g^p$ avec $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ et $Id_{IR^3}(u) = u$)

امتحان

تمرين1

في IR^3 نعتبر الأشعة :

$$a=(0,1,1),\qquad b=(0,1,-1),\qquad c=(2,3,4),\qquad d=(0,1,2)$$

1. برهن على أن $\{a,b,c\}$ تشكل أساس ل IR^3 و عين d في هذا الأخير.
2. لتكن $F=[\{a,b\}]$ و $G=[\{c,d\}]$ احسب $\dim(F+G)$ و $\dim(F\cap G)$ و اختار أساس ل $F\cap G$

تمرين 2

ليكن f تطبيق من IR^3 في IR^3 معرف ب :

$$(\forall (x,y,z)\in IR^3)\quad f(x,y,z)=(x+y,y+z,z)$$

1. برهن على أن f خطي .
2. برهن على أن $\operatorname{Im} f=IR^3$ و استنتج $Kerf$.
3. ليكن $E=\{u\in IR^3 / f(u)=u\}$ برهن على أن E فضاء شعاعي جزئ ل IR^3
4. عرف مكمل G ل E بالنسبة ل IR^3 .
5. ليكن g التطبيق المعرف ب :

$$(\forall u\in IR^3)\quad g(u)=f(u)-u$$

احسب $g^3(u)=(gogog)(u)$ و استنتج :

$$f^n(u)=\underbrace{fofo\cdots of}_{n\text{ fois}}(u)\quad (n\in IN)$$

ملاحظة :

$$(g+Id_{IR^3})^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p g^p \quad \text{avec}\quad C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}\quad \text{et}\quad Id_{IR^3}(u)=u$$

Correction

Exo1 :

1. $1^{ère}$ méthode : comme $\dim IR^3 = Card\{a,b,c\} = 3$, on a,
   $\{a,b,c\}$base $\Leftrightarrow$ $\{a,b,c\}$libre $\Leftrightarrow$ $\{a,b,c\}$génératrice et ainsi,
   puisque $\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c = 0_{IR^3} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, $\{a,b,c\}$est libre et constitue donc une base de IR^3. Pour exprimer d dans cette base, on résout
   $$\alpha\, a + \beta\, b + \gamma\, c = d \Leftrightarrow \begin{cases} 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 1 \\ \alpha - \beta + 4\gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 3/2 \\ \beta = -1/2 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2}(3a - b).$$
   $2^{ème}$ méthode, on a :
   $$\begin{pmatrix} c & a & b & d \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & a & b' = a-b & d' = a-d \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Ce tableau, montre que $rg\{a,b,c\} = rg\{a,b',c\} = 3 = \dim IR^3 = Card\{a,b,c\}$et donc $\{a,b,c\}$ constitue une base de IR^3. D'autre part, on voit également
   que : $-2d' = b' \Leftrightarrow -2(a-d) = (a-b) \Rightarrow 2d = 3a - b \Rightarrow d = \frac{1}{2}(3a-b)$
2. $\dim(F+G) = rg\{a,b,c,d\} = 3$ (question précédente).
   D'autre part, il est clair que $\dim F = \dim G = rg\{a,b\} = rg\{c,d\} = 2$
   et l'on a, donc :
   $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim(F+G) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Ainsi, toute base de $F \cap G$ comprend un seul élément ($\neq 0$) et comme
$$d \in G \wedge d = \frac{1}{2}(3a-b) \in F \Rightarrow d \in F \cap G$$
Et, donc $\{d\}$en est une base.

Exo2

1. Soient $\alpha, \beta \in IR$ et $u, u' \in IR^3$, posons $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$, nous avons
   $$\begin{aligned} f(\alpha\, u + \beta\, u') &= f(\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')) = f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z', \alpha z + \beta z') \quad \text{(déf. de } f\text{)} \\ &= \alpha(x+y, y+z, z) + \beta(x'+y', y'+z' z') \quad \text{(règles de calcul dans } IR^3\text{)} \\ &= \alpha\, f(u) + \beta\, f(u') \quad \text{(déf. de } f\text{)} \end{aligned}$$
2. $u = (x,y,z) \Rightarrow f(u) = (x+y, y+z, z) = x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,1,1)$
   $\Rightarrow \mathrm{Im}\, f = [\{(1,00), (1,1,0), (0,1,1)\}]$
   D'autre part, $\alpha(1,00) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$
   Ainsi $\{(1,00), (1,1,0), (0,1,1)\}$est une base de $\mathrm{Im}\, f$ et l'on a :
   $\dim \mathrm{Im}\, f = 3 = \dim IR^3 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f = IR^3$
   $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim Kerf = \dim IR^3 = 3 \Rightarrow \dim Kerf = 3 - 3 = 0 \Rightarrow Kerf = \{0\}$