Ch.1 Rappels Mathématiques: Calcul des Incertitudes

CUAT-IST 18.10.2010 K.Demmouche (cours 1 Phys1) suite 1

1 Introduction

Mesurer une grandeur: c´est l´exprimer en nombre, c.à.d chercher combien de fois d´une grandeur de la même espèce choisie comme *unité*.

Exemple: Longueur d´une table L

$$L = 5 \text{ m} \rightarrow 5 \text{ fois le mètre.} \tag{1}$$

On arrive au même résultat en fesant la somme de 5 longueur d´ 1 mètre. On définit aussi le rapport de la longueur par l´unité choisie qui donne un nombre réel

$$5 = \frac{L}{m}. \tag{2}$$

Une grandeur est mesurable si l´on sait définir le rapport, la somme et égalité.

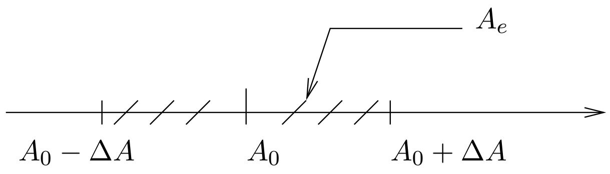
2 Valeur exacte et valeur approchée

La valeur exacte est un concept. Dans la plupart des cas la valeur exacte ne peut être déterminée. Par ailleurs la valeur mesurée expérimentalement d´une grandeur physique A n´est qu´une valeur *approchée* de la valeur *exacte* (vraie).

La différence entre ces deux valeurs δA définie l´*erreur absolue* de la mesure

$$\delta A = A_{mesure} - A_{vraie} = A_0 - A_e. \tag{3}$$

Cette erreur est le résultat de plusieurs erreurs de causes diverses:



Erreurs systématiques: résultat de l´emploi d´une méthode déterminée ou d´instrument imparfait.

Pour éliminer ces erreurs il faut controler les appareils de mesure.

Erreurs accidentelles

Elles sont comisent par l´opérateur (l´expérimentateur).

3 Incertitude absolue

L´erreur absolue n´étant aussi pas connue, on doit se contenter d´en chercher une limite superieur de δA. Cette limite appelée l´*Incertitude absolue* et notée ΔA:

$$|\delta A| \leqslant \Delta A. \tag{4}$$

L´erreur ne peut excéder l´incertitude absolue dans le cas le plus défavorable de la mesure

Exemple: La mesure d´une longueur deux fois donne:

$$209.5 \text{ mm et } 210.5 \text{ mm}. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} l_0 &= 210 \text{ mm} && (6)\\ \Delta l &= 0.5 \text{ mm}. && (7) \end{aligned}$$

Donc

$$209.5 \text{ mm} \leqslant l_0 \leqslant 210.5 \text{ mm}. \tag{8}$$

4 Incertitude relative

Elle donne une information sur la précision de la mesure, c´est un nombre sans dimension qui est le rapport r entre l´incertitude absolue et la valeur mesurée:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta A}{A_0} && (9)\\ \text{Precision} &= \frac{\Delta A}{A_0} \times 100\%. && (10) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = 2.5 \times 10^{-3} \rightarrow precision = 2.5 \text{ par mille}. \tag{11}$$

5 La mesure indirecte

Pour mésurer une résistance Ohmique, on mesure tout d´abord dans un circuit la tension V aux bornes de la résistance et le courant qui la traverse I. V et I sont mesués donc *directement* et indépendemment:

$$\begin{aligned} I &= I_0 \pm \Delta I \qquad (12) \\ V &= V_0 \pm \Delta V. \qquad (13) \end{aligned}$$

La résistance R est calculée par la loi d´Ohm $V = RI$, mais nous voulons aussi déterminer ΔR ! où

$$R = f(V, I). \qquad (14)$$

Supposons que u, v, w sont des grandeurs mesurées directement et

$$y = f(u, v, w). \qquad (15)$$

et on veut déterminer indirectement $y_0 \pm \Delta y$. On distigue les deux cas:

A- Somme algêbrique

Si y est une somme algèbrique:

$$y = nu + pv + qw + c \text{ avec } n, p, q, c \text{ constantes reelles.} \qquad (16)$$

L´erreur absolue s´écrit

$$\delta y = n\delta u + p\delta v + q\delta w \qquad (17)$$

où c n´apparait pas puisque c´est une constante qui ne subit aucune variation.

L´incertitude absolue est la majoration de cette erreur en remplaçant tout les δ par Δ et en prenant les constantes en valeur absolue:

$$\Delta y = |n|\Delta u + |p|\Delta v + |q|\Delta w. \qquad (18)$$

B- Multiplication

Supposons que

$$y = cu^n v^p w^q \text{ avec } n, p, q, c \text{ constantes reelles.} \qquad (19)$$

Pour écrire δy on procède à un calcul variationnel, en commençant tout d´abord par calculer la différentielle dy:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw, & (20) \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v + \frac{\partial y}{\partial w}\delta w, & (21) \end{aligned}$$

Ceci donne pour l´incertitude absolue

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v + \frac{\partial y}{\partial w}\Delta w. \quad (22)$$

On remplace les dérivées partielles de y, ça donne

$$\Delta y = |cnu^{n-1}v^p w^q|\Delta u + |cu^n pv^{p-1}w^q|\Delta v + |cu^n v^p qw^{q-1}|\Delta w, \quad (23)$$

Si on divise de part et d´autre par $y = cu^n v^p w^q$, on obtient l´erreur relative

$$\frac{\Delta y}{|y|} = |n|\frac{\Delta u}{|u|} + |p|\frac{\Delta v}{|v|} + |q|\frac{\Delta w}{|w|}. \quad (24)$$

On obtient exactement le même résultat si on utilise la fonction logarithmique et puis la différentielle, par exemple

$$\begin{aligned} \log y &= \log c + n\log u + p\log v + q\log w & (25) \\ d\log y &= \underbrace{d\log c}_{=0} + nd\log u + pd\log v + qd\log w & (26) \\ \frac{dy}{y} &= n\frac{du}{u} + p\frac{dv}{v} + q\frac{dw}{w}, & (27) \end{aligned}$$

parceque

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx = f'dx. \quad (28)$$

Maintenant on obtient la relation de l´incertitude absolue en remplaçant:

- Toutes les quantités sans le Δ par leurs valeurs absolues.
- Tous les signes $-$ par le signe $+$
- d par Δ.

On obtient à la fin

$$\frac{\Delta y}{|y|} = |n|\frac{\Delta u}{|u|} + |p|\frac{\Delta v}{|v|} + |q|\frac{\Delta w}{|w|}. \tag{29}$$

Exemple:

L´energie Q dissipée dans un conducteur Ohmique R parcourus par un courant I pendant un temps t est donnée par

$$Q = RI^2t. \tag{30}$$

Calculer ΔQ.

On a

$$\begin{aligned} \log Q &= \log R + 2\log I + \log t & (31) \\ d\log Q &= d\log R + 2d\log I + d\log t & (32) \\ \frac{dQ}{Q} &= \frac{dR}{R} + 2\frac{dI}{I} + \frac{dt}{t} & (33) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t} \tag{34}$$

Enfin,

$$\Delta Q = Q\left(\frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t}\right) \geqslant 0. \tag{35}$$