Chapitre 6

Variables aléatoires simultanées

6.0.15 Fonction de répartition simultanée

Il est souvent nécessaire de considérer des événements relatifs à deux variables (ou plus) simultanément. On définit pour cela une fonction à deux variables a et b:

$$F(a,b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} \quad \text{avec:} \ (-\infty < a < \infty, -\infty < b < \infty) \tag{6.1}$$

où F est appelée *fonction de répartition simultanée* des variables aléatoires X et Y.

6.0.16 Fonction de répartition marginale

La fonction de répartition de X peut être déduite de la fonction de répartition simultanée de X et Y comme suit:

$$\begin{aligned} &F_X(a) = P\{X \leq a\} = P\{X \leq a, Y < +\infty\} \\ &= lim_{b\to\infty} P\{X \leq a, Y \leq b\} = lim_{b\to\infty} F(a,b) = F(a,+\infty) \end{aligned} \tag{6.2}$$

De même:

$$F_Y(b) = P\{Y \leq b\} = F(+\infty, b) \tag{6.3}$$

F_X et F_Y sont appelées fonction de répartition marginales de X et Y.

6.0.17 Loi de probabilité simultanée

Lorsque X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, on peut définir la loi de probabilité simultanée de X et Y comme suit:

$$p(i,j) = P\{X = i, Y = j\} \tag{6.4}$$

La loi de probabilité marginale de X se déduit par:

$$p_X(i) = P\{X = i\} = \sum_j P\{X = i, Y = j\} = \sum_j p(i,j) \tag{6.5}$$

De même:

$$p_Y(j) = \sum_i p(i,j) \tag{6.6}$$

6.0.18 Exemples de variables aléatoires simultanées

On fait un tirage de 3 boules au hasard d'une boite contenant 3 rouges, 4 blanches et 5 vertes.

X désigne le nombre de boules rouges d'un tirage donné et Y désigne le nombre de boules blanches.

La loi de probabilité simultanée $p(i,j) = P\{X = i, Y = j\}$ de X et Y est alors:

$$\begin{aligned}
p(0,0) &= C_0^3\, C_0^4\, C_3^5 / C_3^{12} = 10/220 \\
p(0,1) &= C_0^3\, C_1^4\, C_2^5 / C_3^{12} = 40/220 \\
p(0,2) &= C_0^3\, C_2^4\, C_1^5 / C_3^{12} = 30/220 \\
p(0,3) &= C_0^3\, C_3^4\, C_0^5 / C_3^{12} = 4/220 \\
p(1,0) &= C_1^3\, C_0^4\, C_2^5 / C_3^{12} = 30/220 \\
p(1,1) &= C_1^3\, C_1^4\, C_1^5 / C_3^{12} = 60/220 \\
p(1,2) &= C_1^3\, C_2^4\, C_0^5 / C_3^{12} = 18/220 \\
p(2,0) &= C_2^3\, C_0^4\, C_1^5 / C_3^{12} = 15/220 \\
p(2,1) &= C_2^3\, C_1^4\, C_0^5 / C_3^{12} = 12/220 \\
p(3,0) &= C_3^3\, C_0^4\, C_0^5 / C_3^{12} = 1/220
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Remarquons que: $\sum_{i,j} p(i,j) = 1$.

On peut aussi calculer les probabilités marginales $p_X(i)$ et $p_Y(j)$ et voir que:

$$\sum_i p_X(i) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_j p_Y(j) = 1$$

6.0.19 Densité de probabilité simultanée

Les variables aléatoires X et Y sont dites simltanément continues s'il existe une fonction $f(\cdot,\cdot)$ à deux arguments réels, ayant pour tout sous-ensemble C du plan la propriété suivante:

$$P\{(X,Y) \in C\} = \int\int_{(x,y)\in C} dx\, dy\, f(x,y) \tag{6.8}$$

$f(x,y)$ est appelée densité de probabilité simultanée de X et Y.

En définissant $C = \{(x,y) | x \in A, y \in B\}$, c'est un domaine rectangulaire, on a:

$$P\{x \in A, y \in B\} = \int_A dx \int_B dy\, f(x,y) \tag{6.9}$$

On sait que:

$$\begin{aligned}
F(a,b) &= P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{x \in]-\infty, a[, y \in]-\infty, b[\} \\
&= \int_{-\infty}^{a} dx \int_{-\infty}^{b} dy\, f(x,y)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

d'où:

$$f(a,b) = \frac{\partial^2 F(a,b)}{\partial a\, \partial b} \tag{6.11}$$

Si X et Y sont des variables aléatoires simultanées continues, alors elles sont individuellemnt continues. Leurs densités de probabilités marginales sont données par:

$$\begin{aligned}
P\{x \in A\} &= P\{x \in A, y \in]-\infty, \infty[\} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_A dx f(x,y) \\
&= \int_A dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy f(x,y) \right)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

On définit alors:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x,y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x,y) \tag{6.13}$$

6.0.20 Exemples d'applications des densités de probabilité simultanées

La densité de probabilité simultanée de deux variables aléatoires X et Y est donnée par:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\ e^{-x}\ e^{-2y} & \text{si } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.14}$$

Calculons:

- $$\begin{aligned} P\{X > 1, Y < 1\} &= \int_0^1 dy \left(\int_1^\infty dx\ 2\ e^{-x} \right)\ e^{-2y} \\ &= \int_0^1 dy 2\ e^{-2y}\ \left(-e^{-x}\right)\vert_1^\infty \\ &= 2\ e^{-1}\ \int_0^1 dy e^{-2y} = e^{-1}\ (1 - e^{-2}) \end{aligned} \tag{6.15}$$

- $$P\{X < Y\} = \int_0^\infty dy \int_0^y dx\ 2\ e^{-x}\ e^{-2y} = 1/3 \tag{6.16}$$