Chapitre 5

Variables aléatoires continues

5.0.13 Définition d'une variable aléatoire continue

Nous avons vu dans le cas de variables aléatoires discrètes, que l'ensemble des valeurs de la variable alétoires pouvait être soit fini, soit infini dénombrable.

Mais il existe aussi des variables alétoires telles que leur ensemble de valeurs peut être infini et non dénombrable, de telles variables sont appelées variables aléatoires continues.

Exemples: horaire d'arrivée d'un train, la taille d'une personne, ...

Une définition équivalente est la suivante: X désigne une telle variable qu'on qualifiera d'aléatoire continue, s'il existe une fonction f non-négative pour tout $x \in R$ et vérifiant pout tout sous-ensemble de nombres réels $B \subset R$ la propriété:

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)\ dx \tag{5.1}$$

Cette relation généralise la relation connue du cas discret:

$$P\{X \in B\} = \sum_{i \in B} P\{X = i\} \tag{5.2}$$

La fonction f est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.

On a evidemment:

- $P\{X \in]-\infty, \infty[\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$
- $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)\ dx$
- La fonction de répartition dans le cas continue s'écrit:

$$F(a) = P\{X < a\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx \tag{5.3}$$

et inversement:

$$f(a) = \frac{dF(a)}{da} \tag{5.4}$$

- Notons aussi que dans le cas continu, on a: $P\{X = a\} = P\{X \in]a, a[\} = 0$. La probabilité qu'une v.a. continue prenne une valeur isolée fixe est toujours nulle.

5.0.14 Types de variables aléatoires continues

Comme pour les v.a. discrètes, les variables continues sont aussi réparties en plusieurs catégories selon le type de leur loi.

Variable uniforme sur un intervalle $]\alpha,\beta[$

Une variable aléatoire est dite uniforme sur l'intervalle réel$]\alpha,\beta[$, si sa densité de probabilité est donnée par:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(\beta-\alpha)} & \text{si } \alpha<x<\beta \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{5.5}$$

La fonction de repartition d'une variable uniforme est donnée par:

$$F(a)=\begin{cases}0 & \text{si } a\leq\alpha \\ \frac{(a-\alpha)}{(\beta-\alpha)} & \text{si } \alpha<x<\beta \\ 1 & \text{si } a\geq\beta\end{cases} \tag{5.6}$$

Variable aléatoire normale

Une variable aléatoire X est dite normale avec paramètres μ et σ^2 si la densité de probabilité de X est donnée par:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{avec: } -\infty<x<\infty \tag{5.7}$$

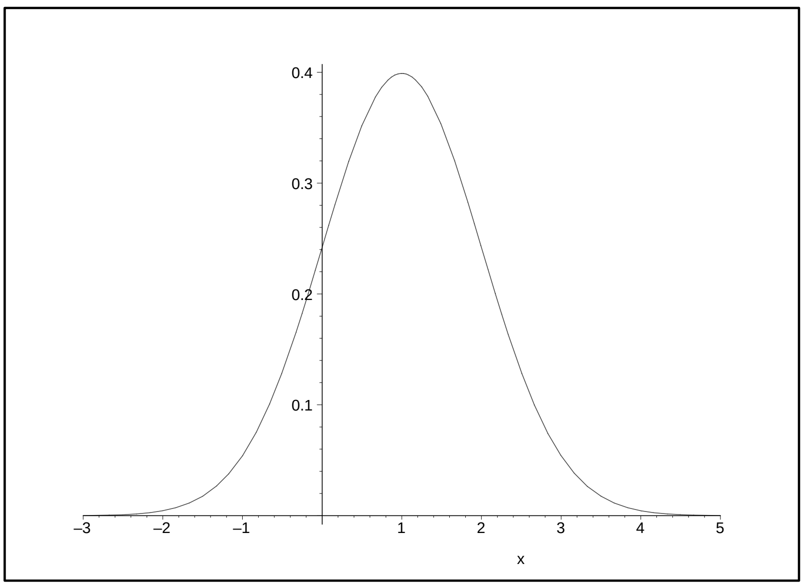

Fig. 1 Variable aléatoire normale de paramètres $(\mu=1,\ \sigma=1)$

μ et σ^2 représente d'une certaine manière la valeur moyenne de X et une mesure de ses variations.

A partir de cette definition, on a bien:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx=1 \tag{5.8}$$

Ceci peut se voir en faisant le changement de variables $y=(x-\mu)/\sigma$ et en utilisant la relation connue: $\int_{-\infty}^{+\infty} dy\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)=\sqrt{2\pi}$.

Propriété: Si X est une variable aléatoire normale avec paramètres μ et σ^2, alors la nouvelle variable alétoire $Y=\alpha\,X+\beta$ est aussi une variable aléatoire normale avec les paramètres $(\alpha\,\mu+\beta)$ et $\alpha^2\,\sigma^2$.

Preuve: La fonction de répartition de Y est donnée par:

$$\begin{aligned} F_Y(a) &= P\{Y \leq a\} = P\{\alpha\, X + \beta \leq a\} = P\left\{X \leq \frac{a-\beta}{\alpha}\right\} \\ &= F_X\left(\frac{a-\beta}{\alpha}\right) = \int_{-\infty}^{(a-\beta)/\alpha} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\alpha\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-(\alpha\,\mu+\beta))^2}{2\,\alpha^2\,\sigma^2}\right) dy \end{aligned}$$

Donc:

$$f_Y(a) = \frac{1}{\alpha\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-(\alpha\,\mu+\beta))^2}{2\,\alpha^2\,\sigma^2}\right)$$

Variable normale standard (ou centrée réduite)

D'après la propriété précédente, si X est une variable aléatoire normale avec paramètres (μ,σ^2), alors la variable $Z = (X-\mu)/\sigma$ est une variable aléatoire normale avec paramètres (0,1).

Une variable mormale ayant ces paramètres est dite *standard* ou *centrée réduite*.

On note par Φ la fonction de réparttion d'une variable normale standard:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \tag{5.9}$$

Les valeurs de cette fonction sont calculées de manière numérique et sont données dans des tables. On les donne pour les valeurs de x entre 0 et l'infini. Pour les autres valeurs, on peut utilisé des relations telles que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Ce qui donne pour la variable standard Z:

$$P\{Z \leq -x\} = P\{Z > x\} \quad \text{pour } -\infty < x < \infty \tag{5.10}$$

On peut alors exprimer la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale X avec paramètres (μ,σ^2) par la fonction Φ:

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{5.11}$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs numériques de la fonction $\Phi(x)$:

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0.500	1.6	0.945
0.2	0.579	1.8	0.964
0.4	0.655	2.0	0.977
0.6	0.726	2.2	0.986
0.8	0.788	2.4	0.991
1.0	0.841	2.6	0.995
1.2	0.885	2.8	0.997
1.4	0.919	3.0	0.999

Pour les autres valeurs, on peut utiliser des interpolations. Par exemple:

$$\Phi(x_0) = \Phi(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)}{(x_2 - x_1)}\Big(\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\Big)$$

Approximation de Φ

On a:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \tag{5.12}$$

pour tout $x > 0$, ce qui donne:

$$1 - \Phi(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \tag{5.13}$$

pour les grandes valeurs de x.

Variable aléatoire exponentielle

Une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

où λ est positif, est dite variable aléatoire exponentielle de paramètre λ.

La fonction de répartition F est donnée par:

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 0 \\ \\ \int_0^a dx \lambda \exp(-\lambda x) = 1 - e^{-\lambda a} & \text{si } a \geq 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

On remarquera que $F(+\infty) = 1$.

Densité de probabilité de Laplace

La densité de probabilité de Laplace est une forme symétrisée de la densité de probabilité exponentielle, elle est donnée par:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \frac{1}{2}\lambda \exp(+\lambda x) & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\lambda \exp(-\lambda |x|) \tag{5.16}$$

La fonction de répartition est alors:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(\lambda x) & \text{si } x \leq 0 \\ \\ 1 - \frac{1}{2}\exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Exercice:

A partir de 6h00 du matin, les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt donné. Il passent donc à 6h00, 6h15, 6h30, ...

Un usager arrive entre 7h00 et 7h30. L'heure de son arrivée est une variable aléatoire uniforme sur cette période $[7h00, 7h30]$.

1- Donner le graphe de la densité de probabilité de l'heure d'arrivée de l'usager.

2- Trouver la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes pour prendre le bus.

Réponse:

Si T est l'heure d'arrivée en minutes comptée à partir de 7h00, on a:

$$\begin{aligned} &\text{Pobabilité d'attendre moins de 5mn} = P\{10 < T < 15\} + P\{25 < T < 30\} \\ &= \int_{10}^{15} \frac{dx}{30} + \int_{25}^{30} \frac{dx}{30} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice:

La fonction de répartition d'une variable aléatoire est donnée par:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/2 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 11/12 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases} \tag{5.18}$$

Vérifier que: $P\{X < 3\} = 11/12$, $P\{X > 1/2\} = 3/4$, $P\{X = 1\}1/6$, $P\{2 < X \leq 4\} = 1/12$.

Exercice:

Soit X une v.a. normale de paramètres ($\mu = 3, \ \sigma^2 = 9$). Calculer:

1- $P\{2 < X < 5\}$

2- $P\{X > 0\}$

3- $P\{|X - 3| > 6\}$

On donne: $\Phi(2/3) = .7454$, $\Phi(1/3) = .6293$, $\Phi(1) = .8413$, $\Phi(2) = .9772$.
Réponse:
1-

$$\begin{aligned} P\{2 < X < 5\} &= P\Big\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\Big\} = P\Big\{\frac{-1}{3} < Z < \frac{2}{3}\Big\} \\ &= \Phi\Big(\frac{2}{3}\Big) - \Phi\Big(\frac{-1}{3}\Big) = \Phi\Big(\frac{2}{3}\Big) - 1 + \Phi\Big(\frac{1}{3}\Big) = .3747 \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} P\{X > 0\} &= P\Big\{\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\Big\} = P\{Z > -1\} \\ &= 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = .8413 \end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned} P\{|X-3| > 6\} &= P\{X > 9\} + P\{X < -3\} = P\{Z > 2\} + P\{Z < -2\} \\ &= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 2(1 - \Phi(2)) = .456 \end{aligned}$$