Chapitre 7

Espérance mathématique

7.0.21 Définition

A- Pour une variable aléatoire discréte x de loi de probabilité $p(i)$, on définit l'espérance de X, notée par $E[X]$, par l'expression:

$$E[X] = \sum_i i\ p(i) \tag{7.1}$$

C'est à dire la moyenne pondérée des valeurs que X peut prendre, les poids étant les probabilités correspondantes.

B- Pour une variable aléatoire continue X admettant une densité de probabilité $f(x)$, on définit de manière similaire:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ x\ f(x) \tag{7.2}$$

Exemples d'espérance de variables discrétes

A- Espérance d'une variable de Bernouilli

X peut prendre 2 valeurs 0 et 1 avec les probabilités $p(0) = 1 - p$ et $p(1) = p$, l'espérance est donnée par:

$$E[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p \tag{7.3}$$

B- Espérance d'une variable de binomiale

X peut prendre les valeurs $0, \cdots, n$ avec les probabilités $p(i) = C_i^n p^i (1-p)^{n-i}$, l'espérance est donnée par:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{n} i\ p(i) = \sum_{i=0}^{n} i\ C_i^n p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{i\ n!}{i!\ (n-i)!} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p\ n\ (n-1)!}{(i-1)!\ (n-i)!} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\
&= n\ p \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!\ (n-i)!} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\
&= n\ p \sum_{j=0}^{n} \frac{(n-1)!}{j!\ (n-1-j)!} p^{j} (1-p)^{n-1-j} \\
&= n\ p\ [p + (1-p)]^{n-1} = n\ p
\end{aligned} \tag{7.4}$$

C- Espérance d'une variable de Poisson

X peut prendre les valeurs $0, \cdots, \infty$ avec les probabilités $p(i) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^i}{i!}$, l'espérance est donnée par:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\ p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\ e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i\ e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda\ e^{-\lambda}\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda\ e^{-\lambda}\ e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned} \tag{7.5}$$

D- Espérance d'une variable de géométrique

X peut prendre les valeurs $1, \cdots, \infty$ avec les probabilités $p(i) = (1-p)^{i-1}p$, l'espérance est donnée par:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} i\ p(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\ (1-p)^{i-1}\ p \\
&= p\ \sum_{i=1}^{\infty} i\ q^{i-1} \quad \text{où } q = 1-p \\
&= p\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dq}\ q^i \\
&= p\ \frac{d}{dq}\ \sum_{i=1}^{\infty} q^i = p\ \frac{d}{dq}\ \left(\frac{q}{1-q}\right) \\
&= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Exemples d'espérance de variables continues

A- Espérance d'une variable uniforme

La densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\beta-\alpha)} & \text{si } \alpha < x < \beta \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.7}$$

d'où l'espérance:

$$E[X] = \int_a^b dx \frac{x}{(\beta-\alpha)} = \frac{1}{(\beta-\alpha)} \cdot \frac{(\beta^2-\alpha^2)}{2} = \frac{(\alpha+\beta)}{2} \tag{7.8}$$

C'est à dire le milieu de l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

B- Espérance d'une variable exponentielle

La densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{7.9}$$

d'où l'espérance:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{\infty} dx\ x\lambda e^{-\lambda x} = -\int_0^{\infty} x d(e^{-\lambda x}) \\
&= (-x\ e^{-\lambda x})|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dx\ e^{-\lambda x} = -\left(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right)|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

C- Espérance d'une variable normale

La densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{avec:} \ -\infty < x < \infty \tag{7.11}$$

d'où l'espérance:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (x-\mu) \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) + \mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) = \mu \end{aligned} \tag{7.12}$$

car la première intégrale est nulle pour raison de symétrie.

7.0.22 Espérance d'une fonction de variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire. Il arrive que l'on s'intéresse à une autre variable aléatoire Y qui est fonction de X : $Y = g(X)$. En particulier, pour les espérances, on a les résultats suivants:

- Cas d'une variable aléatoire X discréte Si la loi de probabilité de cette variable aléatoire X est $p(i)$, alors pour toute fonction réelle g(.), on aura:

$$E[g(X)] = \sum_i g(i)\ p(i) \tag{7.13}$$

- Cas d'une variable aléatoire X continue Si cette variable aléatoire X est de dnesité de probabilité $f(x)$, alors pour toute fonction réelle g(.), on aura:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ g(x)\ f(x) \tag{7.14}$$

Exemples:
<u>Linéarité de l'espérance</u>
Pour toute paire a, b de constantes, on a:

$$E[a\ X + b] = a\ E[X] + b \tag{7.15}$$

On peut voir cela dans le cas continu:

$$\begin{aligned} E[a\ X + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ (a\ x + b)\ f(x) \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ f(x) + b \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x) = a\ E[X] + b \end{aligned} \tag{7.16}$$

<u>Autres moments à l'origine</u>
$E[X]$ est nommée aussi *premier moment* par rapport à l'origine.
$E[X^n]$ est nommée *n-ième moment* par rapport à l'origine:

$$\begin{array}{ll} \sum_i i^n\ p(i) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x^n\ f(x)\ dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{array} \tag{7.17}$$

7.0.23 Espérance de sommes de variables aléatoires

Espérance de fonction de plusieurs variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires et $g(.,.)$ une fonction de deux variables. Les résultats précédents se généralisent de la manière suivante:

$$E[g(X,Y)] = \sum_{i,j} g(i,j)\ p(i,j) \tag{7.18}$$

dans le cas où X et Y sont discrètes de loi de probabilité simultanée $p(i,j)$, et:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ g(x,y)\ f(x,y) \tag{7.19}$$

dans le cas où X et Y sont continues de densité de probabilité simultanée $f(x,y)$.

Cas d'une somme de variables aléatoires

Supposons que $E[X]$ et $E[Y]$ sont finies. On pose $g(X,Y) = X+Y$, on obtient (dans le cas continu):

$$\begin{aligned}
E[X+Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ (x+y)\ f(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dxx \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(x,y)\right) + \int_{-\infty}^{\infty} dyy \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x,y)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dxx\ f_X(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dyy\ f_Y(y) \\
&= E[X] + E[Y] \qquad (7.20)
\end{aligned}$$

Généralisation

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] \tag{7.21}$$