Chapitre 2

Axiomes des probabilités

On va définir plusieurs notions qui vont permettre de construire la théorie des probabilités: ensemble fondamental, événement, probabilité, ...

2.0.1 Ensemble fondamental et événement

Ensemble fondamental

- L'ensemble des résultats possibles à une expérience est désigné comme l'*ensemble fondamental* de l'expérience. On le note S.

Exemples:
- Jet d'une pièce de monnaie: $S = \{pile, face\}$
- Jet d'un dé à 6 faces: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Jet de 2 pièces de monnaie: $S = \{pp, fp, pf, ff\}$
- Jet de 2 dés: $S = \{(i, j); i, j = 1, 2, \cdots, 6\}$

Evénements

-Tout sous-ensemble E de l'ensemble fondamental S est appelé *événement*. Un événement est donc un ensemble (obéissant à une certaine condition) correspondant à divers résultats possibles de l'expérience.

Exemple:
- Jet d'une pièce de monnaie: $E = \{pile\}$ est l'événement que pile apparaisse.
- Jet d'un dé: $E = \{1, 3, 5\}$ est l'événement pour qu'un nombre impair apparaisse.
- Jet de 2 pièces de monnaie: $E = \{pp, pf\}$ est l'événement que pile apparaisse au premier jet.
- Jet de 2 dés: $E = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ est l'événement pour que la somme des nombres des 2 dés donne 10.

2.0.2 Opérations sur les événements

- **Union:**

Soient E et F deux événements d'un ensemble fondamental S. On définit l'événement $E \cup F$ comme l'événement contenant chaque point de E et chaque point de F.

- **Intersection:**

On définit l'événement $E \cap F$ comme l'événement contenant les points qui sont à la fois dans E et dans F.

- **Evénement vide:**

On appelle événement vide $\varnothing$, l'événement ne contenant aucun point.

- **Evénements mutuellement exclusifs (ou incompatibles):**

Deux événements E et F sont dits mutuellement exclusifs si on a $E \cap F = \varnothing$.

- **Extension des définitions:**

Union et intersection de plus de deux événements:

Si $E_1, E_2, E_3, \cdots$ sont des événements, on définit:

$\bigcup_{n=1}^{\infty}$: union de tous les événements
$\bigcap_{n=1}^{\infty}$: intersection de tous les événements
- **Complementation:**

Pour chaque événement E, on définit E^c, l'événement complémentaire de E, comme l'événement contenant tous les points de S non contenu dans E.

Représentation graphique:

Exemples:
- Si $E = \{pile\}$ alors $E^c = \{face\}$
- Si $E = \{pp, fp\}$ alors $E^c = \{ff, fp\}$
- $S^c = \varnothing$
- **Inclusion:**

L'événement F est inclus dans l'événement E si $F \subset E$.

2.0.3 Propriétés des opérations sur les événements

- **Commutativité:**

$$E \cup F = F \cup E\ , \qquad E \cap F = F \cap E$$

- **Associativité:**

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)\ , \qquad E(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

- **Distributivité:**

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)\ , \qquad E(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$$

- **Lois de Morgan:**

$$(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\ , \qquad E(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

2.0.4 Axiomes des probabilités

Axiomes

Pour chaque événement E de S, $n(E)$ est le nombre de fois où l'événement E survient lors des n premières répétitions de l'expérience. Alors $P(E)$ la probabilité de l'événement E est définie par:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

converge vers une certaine valeur.

- **Axiome 1:**

$0 \leq P(E) \leq 1$

- **Axiome 2:**

$P(S) = 1$

- **Axiome 3:**

Pour chaque séquence d'événements mutuellement exclusifs $E_1, E_2, \cdots$ tels que $(E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j)$, on a:

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Conséquences immédiates

- Soit une séquence d'événements $E_1, E_2, \cdots$ où $E_1 = S$ et $E_i = \varnothing$ pour $i > 1$. Comme ces événements sont mutuellement exclusifs et comme $S = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$, on a par l'Axiome 3:

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(E_i)$$

d'où $P(\varnothing) = 0$.

- Soit une suite finie d'événements mutuellement exclusifs $E_1, E_2, \cdots, E_n$, donc:

$$P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

qui résulte de l'Axiome 3 en posant $E_i = \varnothing$ si $i > n$.

Théorèmes élémentaires

- Nous remarquons que les événements E et E^c sont mutuellement exclusifs $E \cap E^c = \varnothing$ et que $E \cup E^c = S$, donc:

$$P(S) = 1 = P(E) + P(E^c)$$

Donc:

Théorème:

$P(E^c) = P(E) - 1$

- **Théorème:**

Si $E \subset F$, alors $P(E) \leq P(F)$.

Démonstration: Comme $E \subset F$, on a $F = E \cup (F \cap E^c)$. E et $F \cap E^c$ sont mutuellement exclusifs, donc:

$$P(F) = P(E) + P(F \cap E^c) \geq P(E)$$

par les Axiomes 1 et 3.

- **Théorème:**

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Démonstration:

On a $E \cup F = E \cup (F \cap E^c)$ avec E et $F \cap E^c$ mutuellement exclusifs. D'où $P(E \cup F) = P(E) + P(F \cap E^c)$.

De plus, $F = (E \cap F) \cup (F \cap E^c)$, donc $P(F) = P(E \cap F) + P((F \cap E^c)$. CQFD

Remarque:

Il y a aussi d'autres démonstrations.

Exemple:

- On peut aussi montrer que:

$$\begin{aligned}
P(E \cup F \cup G) &= P((E \cup F) \cup G) = P(E \cup F) + P(G) - P((E \cup F) \cap G) \\
&= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) - P((E \cap G) \cup (F \cap G)) \\
&= P(E) + P(F) - P(E \cap F) + P(G) \\
&\quad - P(E \cap G) - P(F \cap G) + P((E \cap G) \cap (F \cap G)) \\
&= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) - P(F \cap G) \\
&\quad + P(E \cap F \cap G)
\end{aligned}$$

- **Théorème:**

En général, on a:

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) + \cdots \\
&\quad + (-)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) + \cdots \\
&\quad + (-)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)
\end{aligned}$$

La somme $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r})$ est prise sur les C_r^n sous-ensembles possibles de taille r de l'ensemble $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Preuve:

(par récurrence)

2.0.5 Hypothèse d'événements élémentaires équiprobables

On appelle événement élémentaire un événement de S constitué de un seul élément de S.

Il est naturel d'admettre dans certains cas que chaque événement élémentaire de l'ensemble fondamental S à la même probabilité d'apparaître.

Si $S = \{1, 2, \cdots, N\}$, on suppose que:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{N\}) = \frac{1}{N}$$

Il résulte que pour tout événement E de S:

$$P(E) = \frac{\text{Nombre de points dans } E}{\text{Nombre de points dans } S}$$

Exemple 1:

Si 2 dés son jetés, quelle est la probabilité que leur somme donne 7?

$S = \{(i, j); 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$ contient 36 points.

$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ contient 6 points d'où $P(E) = \frac{1}{6}$.

Exemple 2:

Dans une boite, on a 6 boules blanches et 5 noires. On tire deux boules au hasard. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche et une noire?

a) Si on considére des tirages de boules ordonnées:

$S = \{BB(60), BN(30), NB(30), NN(20)\}$ contient 110 points car il y a 11 boules.

$E = \{BN(30), NB(30)\}$ contient 60 points, d'où $P(E) = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$

a) Si on considére des tirages de boules non ordonnées:

$S = \{BB(C_0^5 C_2^6 = 15), BN(C_1^5 C_1^6 = 30), NN(C_2^5 C_0^6 = 10)\}$ contient $C_2^{11} = 55$ points car il y a 11 boules.

$E = \{BN(30)\}$ contient 30 points, d'où $P(E) = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$.

Exercice:

Dans un meeting d'athlétisme, 8 couloirs sont numérotées de 1 à 8. Trouver les différentes possibilités pour placer les coureurs si:

1) On a 8 coureurs:

Réponse: $8.7.6.5.4.3.2.1 = 8! = 40320$

2) On a seulement 5 coureurs qu'on peut placer dans 5 couloirs quelconques:

Réponse: $5!.C_5^8 = 8.7.6.5.4 = 6720$

3) On a 10 coureurs, de telle manière que 2 coureurs doivent être placés ensemble sur les couloirs 3 et 8:

Réponse: $C_2^{10}.C_2^8.6! = \frac{10!}{2! \cdot 2!} = 907200$

4) On a deux équipes, chacune de 4 coureurs, les membres d'une même équipe ne doivent pas être côte à côte:

Réponse: $2.4!.4! = 1152$

Exercice:

4 visiteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) arrivent dans une ville qui a 5 hotels $(h_1, \cdots, h_5)$. De combien de manières peut-on disperser ces visiteurs dans ces 5 hotels si:

1) on utilise seulement 4 hotels (exactement):

Réponse: $C_4^5.4! = 120$

2) si 3 hotels exactement sont utilisés et tels que les visiteurs v_1 et v_2 sont placés dans le même hotel:

Réponse: $C_3^5.3! = 60$

Exercice:

Soient des événements tels que:

$P(A)=\frac{3}{8}\quad P(B)=\frac{1}{2}\quad P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Montrer les relations suivantes et représenter par des diagrammes de Venn les événements correspondants:

1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}$
2) $P(A^c)=1-P(A)=\frac{5}{8}\quad P(B^c)=1-P(A)=\frac{1}{2}$
3) $P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)=\frac{3}{8}$
4) $P(A^c\cup B^c)=P((A\cap B)^c)=1-P(A\cap B)=\frac{3}{4}$
5) $P(A\cap B^c)=P(C_A B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

car on a: $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$, l'union de deux événments mutuellemnt exclusifs.

Exercice:

Soient E,F et G trois événements quelconques (trois conditions). Trouver les expressions et dessiner les diagrammes des événements suivants:

- E seul est réalisé: $E\cap F^c\cap G^c$
- E et G le sont mais pas F: $E\cap G\cap F^c$
- au moins l'un des trois est réalisé: $E\cup F\cup G$
- les trois le sont: $E\cap F\cap G$
- aucun ne l'est: $E^c\cap F^c\cap G^c$
- au moins deux d'entre eux le sont: $(E\cap F)\cup(E\cap G)\cup(F\cap G)$

Exercice:

1) Soient E,F et G trois événements quelconques. Montrer l'égalité:

$$\begin{aligned}P(E\cup F\cup G) &= P(E)+P(F)+P(G)-P(E^c\cap F\cap G)\\ &\quad -P(E\cap F^c\cap G)-P(E\cap F\cap G^c)-2P(E\cap F\cap G)\end{aligned}$$

en déduire l'inégalité de Boole:

$P(E\cup F\cup G)\leq P(E)+P(F)+P(G)$

Preuve:

On a que $E\cap F=S\cap(E\cap F)=(G\cup G^c)\cap(E\cap F)=(G\cap E\cap F)\cup(G^c\cap E\cap F)$
qui est l'union de deux événements mutuellement exclusifs. D'où:
$P(E\cap F)=P(E\cap F\cap G)+P(E\cap F\cap G^c)$

2) Montrer par récurrence qu'en général:
$P(\cup_{i=1}^n E_i)\leq\sum_{i=1}^n P(E_i)$

Exercice:

1) Montrer que:
$P(E\cap F)\geq P(E)+P(F)-1$

Preuve:
$P(E\cap F)=P(E)+P(F)-P(E\cup F)\geq P(E)+P(F)-1$

2) Montrer l'inégalité de Benferroni:
$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n)\geq P(E_1)+P(E_2)+\cdots P(E_n)-(n-1)$

Preuve:
Par récurrence en utilisant la question précédente.

Exercice:

Un groupe est formé de 4 couples: 4 hommes et 4 femmes.
On choisit 4 personnes au hasard.

1) Quelle est la probabilité d'avoir "une personne de chaque couple"$=A$?

$$P(A)=\frac{2^4}{C_4^8}=\frac{8}{35}$$

2) Quelle est la probabilité d'avoir "2 hommes et 2 femmes"$=B$?

$$P(B)=\frac{C_2^4\cdot C_2^4}{C_4^8}=\frac{18}{35}$$

3) Quelle est la probabilité d'avoir A et B?

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^4}{C_4^8}=\frac{3}{14}$$

Exercice:

On enferme au hasard N lettres différentes dans N enveloppes d'adresses différentes. Quelle est la probabilité pour qu'une lettre au moins arrive à son vrai destinataire?

Exercice:

On suppose que n personnes sont présentes ensemble.

1) Quelle est la probabilité que leurs dates de naissance tombent sur des jours tous différents (on ne considére pas l'année et on exclut le 29 Février)?

2) Quelle valeur minimale faut-il donner à n pour que cette probabilité atteigne 50 %?