Chapitre 1

Analyse combinatoire

Il arrive souvent dans le calcul des probabilités de dénombrer (ou de compter) les différentes situations pouvant se présenter lors d'une expérience (nombre de résultats possibles pour une expérience). C'est l'objet de l'analyse combinatoire qui est donc la théorie du dénombrement (ou du comptage). Toute cette théorie est basé sur le théorème suivant:

Théorème: Principe fondamental du dénombrement

Si r expériences doivent être réalisées et sont telles que la première peut produire n_1 résultats, la deuxième peut produire n_2 résultats, etc, ... alors il y aura au total $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_r$ résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemple 1:

On peut démontrer ce théorème pour $r = 2$, en considérant deux expériences l'une donnant n résultats $(i = 1, 2, \cdots, n)$ et l'autre donnant m résultats $(i = 1, 2, \cdots, m)$. L'expérience global va donner $n \cdot m$ résultats notés (i, j).

Exemple 2:

Le nombre de plaques minéralogiques composées de 2 lettres et 3 chiffres est de $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676000$.

Si on exclut la répétition des chiffres et des lettres, leur nombre devient $26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 468000$.

Exemple 3:

On considère le jet de deux dés. Le nombre de résultats possibles qu'on peut avoir est 36.

Théorème: Arrangements

On considère n objets tous différents. Il existe:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) \tag{1.1}$$

arrangements dans un ordre donné de r objets pris parmi les n objets.

Démonstration: par le théorème 1a.

Théorème: Permutations

Le nombre de permutations de n objets différents est $n! = A_n^n$ (c'est à dire d'arrangements de n objets considérés en même temps et pris dans un ordre donné).

Démonstration: par le théorème 1a.

Théorème: (Coefficients multinomiaux)

Il y a:

$$C^n_{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_r!} \tag{1.2}$$

permutations différentes de n objets parmi lesquels n_1 sont semblables, n_2 sont semblables, ...

Exemple 1:

Comment peut-on placer 2 boules blanches et 2 boules rouges?

$$C^4_{2,2} = \frac{4!}{2!\ 2!} = 6$$

Les différentes dispositions sont: BBRR-BRBR-BRRB-RBRB-RRBB-RBBR

Exemple 2:

Combien de permutations différentes peut-on former avec 10 boules, dont 4 sont blanches, 3 rouges et 3 vertes?

$$\frac{10!}{4!\ 3!\ 3!} = 4200$$

Théorème: Combinaisons

$C_r^n = A_r^n / r!$ est le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n (l'ordre n'est pas significatif contrairement à l'arrangement).

Exemple 1: Choix entre arrangements et combinaisons

On veut former un sous-groupe de 2 personnes choisies parmi 5 personnes. Combien y a t-il de choix possibles?

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10$$

Si on affecte des fonctions précises aux 2 personnes du sous-groupe, par exemple la première est nommée président et la deuxième secrétaire, on a alors beaucoup plus de possibilité

$$A_2^5 = \frac{5!}{3!} = 20$$

Exercice: Partitions ordonnées

Une boite contient 7 boules numérotées de 1 à 7. On tire de la boite d'abord 2 boules, puis 3 boules et enfin 2 boules. Calculer le nombre de partition ordonnées (A_1, A_2, A_3) de l'ensemble des 7 boules?

$\{[1,2],[3,4,5],[6,7]\}$ et $\{[6,7],[3,4,5],[1,2]\}$ sont deux partitions différentes, par contre $\{[1,2],[3,4,5],[6,7]\}$ et $\{[2,1],[5,4,3],[7,6]\}$ sont les mêmes.

Le premier tirage donne C_2^7 possibilités.

Le deuxième tirage donne C_3^5 possibilités.

Le premier tirage donne C_2^2 possibilités.

Soit au total $C_2^7 \cdot C_3^5 \cdot C_2^2 = \frac{7!}{2!3!2!}$ possibilités.

Le résultat de cet exrecice peut se généraliser par le théorème suivant:

Théorème: Partitions ordonnées

Si un ensemble A contient n éléments et si $n_1, n_2, \cdots, n_r$ sont des entiers positifs tels que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, alors il existe

$$C_{n_1, n_2, \cdots, n_r}^n = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_r!} \tag{1.3}$$

partitions ordonnées différentes de A, de la forme $(A_1, A_2, \cdots, A_r)$ où $A_1, A_2, \cdots, A_r$ contiennent respectivement $n_1, n_2, \cdots, n_r$ éléments.

Démonstration: Le résultat vient de la relation suivante:

$$C_{n_1}^n \cdot C_{n_2}^{n-n_1} \cdot C_{n_3}^{n-n_1-n_2} \cdots C_{n_r}^{n_r} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_r!}$$

Exercice:

On veut placer 10 livres (4 de mathématiques, 3 de chimie, 2 de physique, 1 de français) dans une bibliothèque. Les livres traitant du même sujet doivent rester groupés. Combien y a t-il de dispositions possibles?

Réponse: $4! \cdot (4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!) = 6912$

Exercice:

1) On a un groupe composé de 5 hommes et de 7 femmes. On forme un comité de 2 hommes et de 3 femmes. Combien de comités différents peut-on former?

2) 2 des 7 femmes ne s'entendent pas très bien et refusent de siéger ensemble. Combien de comités différents peut-on former avec cette contrainte?

Réponse:

1) $C_2^5 \cdot C_3^7 = 10 \cdot 35 = 350$ comités possibles.
2) En isolant les 2 femmes dans le groupe, on aura:

$$C_3^7 = C_0^2 \cdot C_3^5 + C_1^2 \cdot C_2^5 + C_2^2 \cdot C_1^5 = 10 + 20 + 5$$

Les dernières possibilités (au nombre de 5) sont à exclure. D'où le nombre de comité possibles:

$$C_2^5 \cdot (C_0^2 \cdot C_3^5 + C_1^2 \cdot C_2^5) = 300$$

Exercice:
Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen.
1) Combien a t-il de choix possibles?
2) même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions?
Réponse:
1) $C_7^{10} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ possibilités.
2) $(5,5) \leftrightarrow C_3^5 \cdot C_4^5 + C_4^5 \cdot C_3^5 + C_5^5 \cdot C_2^5 = 110$
Les 10 possibiltés à exclure sont donné par $C_2^5 \cdot C_5^5$.
Exercice:
Combien y a t-il de façons de placer 5 personnes autour d'un cercle:
1) si elles peuvent être placer de façon quelconque?
2) si deux personnes bien determinées ne peuvent pas être l'une à coté de l'autre?
Réponse:
1) Lorsqu'on place une personne, il nous reste 4 possibilités pour les 4 personnes qui restent, ensuite 3 possibilités, ...
Soit $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ possibilités au total.
2) $24 - 2 \cdot 3! = 12$ possibilités.
Remarques:
On a la formule du binôme qui utilise les combinaisons:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k} \tag{1.4}$$

Et en général, en utilisant les coefficients multinomiaux:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(n_1, n_2, \cdots, n_r)} C_{n_1, n_2, \cdots, n_r}^n x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \tag{1.5}$$

en respectant dans la sommation la condition $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.
Exercice:
Démontrer
1) $C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$
2) Etablir le triangle de Pascal
3) Etablir la formule du binôme
4) Etablir la formule du trinôme
Exercice:
Montrer que si $r \leq min(m,n)$ alors:

$$C_r^{m+n} = C_0^n \cdot C_r^m + C_1^n \cdot C_{r-1}^m + \cdots + C_r^n \cdot C_0^m \tag{1.6}$$