V- Magnétisme

1) Généralités

Les phénomènes physiques faisant intervenir des forces magnétiques sont connues depuis longtemps :

- attraction et répulsion des aimants,
- existence d'un champ magnétique terrestre,
- utilisation de boussoles pour la navigation et l'orientation (marine, aviation), ...

Le lien de ces forces magnétiques avec l'électricité n'a été compris qu'au siècle dernier (Oersted, Faraday, Maxwell, Laplace, ...). Il a été par exemple montré qu'un champ magnétique pouvait être créer par un mouvement de charges électriques.

2) Champ magnétique

Des charges électriques *en mouvement* créent un champ magnétique dans l'espace qui les entourent.

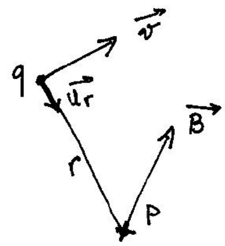
A) Champ magnétique créé par une seule charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point P de l'espace par une charge électrique q située au point M, en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$, est donnée par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\, \vec{v} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

où r est la distance entre les points M et P et où $\vec{u_r}$ est le vecteur unitaire dans la direction et dans le sens du vecteur $\vec{MP}$. On peut donc aussi écrire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\, \vec{v} \times \vec{MP}}{\|\vec{MP}\|^3}$$



A comparer avec le champ électrique créé par cette même charge q au même point P :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,\vec{u_r}}{r^2}$$

On a donc la relation : $\vec{B}(P) = \mu_0\epsilon_0\ (\vec{v}\times\vec{E}(P))$ au point P.

Comme la constante diélectrique ϵ_0, la constante μ_0 est aussi une caractéristique de l'espace qui entoure la charge électrique. Elle s'appelle perméabilité magnétique. On a la relation $\mu_0\ \epsilon_0\ c^2 = 1$, avec c la vitesse de la lumière.

Numériquement :

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ kg\ m\ A^{-1}\ s^{-1}\quad (\text{ou :}\quad H.m^{-1})\qquad \text{pour le vide, l'air, ...}$$

L'unité du champ magnétique $\vec{B}$ est le Tesla (T). On utilise aussi d'autres unités :

$$1\ T = 10^4\ Gauss$$

Exemple :

Un champ électrique E constant est appliqué entre deux points situés à une distance d. Un électron (charge e, masse m) placé dans ce champ va subir une accélération $a = e\ E/m$.

Si au départ sa vitesse est nulle, à l'arrivée il aura acquis une vitesse v telle que $v^2 = 2\ a\ d = 2e\ E\ d/m$.

L'électron en mouvement va créer un champ magnétique perpendiculaire au sens de sa vitesse en un point situé à une distance r. Le module de ce champ est :

$$B_e = \frac{\mu_0}{4\pi}\sqrt{\frac{2e\ E\ d}{m}}\ \frac{e}{r^2}$$

Numériquement, si $E = 10^5\ V/m$, $d = 10\ cm$, $r = 1\ mm$ et avec $e = 1,6\cdot 10^{-19}\ C$, $m = 9,11\cdot 10^{-31} kg$, on trouve $B_e = 0,95\cdot 10^{-12}\ T$.

Le champ électrique créé par l'électron au même point est $E_e = 1,44\cdot 10^{-3}\ V/m$.

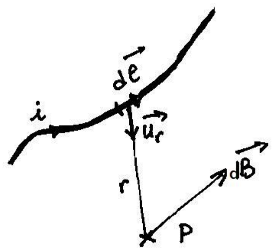
B) Loi de Biot et Savart : Champ magnétique du à un courant électrique

Un mouvement de plusieurs charges dans un conducteur (c'est à dire un courant électrique) crée aussi un champ magnétique (par le principe de superposition).

Si :
- n est le nombre de charges par unité de volume
- A la section du conducteur
- $\vec{v_M}$ la vitesse moyenne des charges

Le nombre de charge pour une longueur dl du conducteur sera $(n\ e\ A\ dl)$, d'où le champ magnétique élémentaire :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(n\ e\ A\ dl)\ (\vec{v_M} \times \vec{u_r})}{r^2}$$



Comme $\vec{v_M}$ est paralléle à $\vec{dl}$, on aura aussi :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(n\ e\ A\ v_M)\ (\vec{dl} \times \vec{u_r})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\ (\vec{dl} \times \vec{u_r})}{r^2}$$

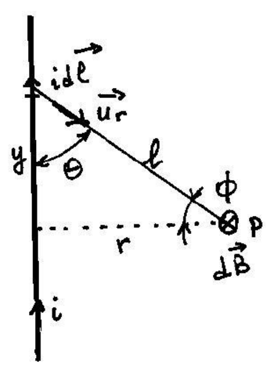
$i\ \vec{dl}$ est appelé un élément de courant.

Pour un conducteur entier, le champ magnétique $\vec{B}$ résulte d'une intégrale le long de ce conducteur :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Conducteur}} \frac{i\ \vec{dl} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

a- Fil rectiligne (infini)

Dans le cas d'un courant circulant dans un fil rectiligne (infini), la direction de $\vec{B}$ est perpendiculaire an fil conducteur et au rayon (voir figure : $\vec{B}$ vecteur entrant) :



On a :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dl\sin\theta}{l^2} \qquad \text{donc :} \qquad B = \frac{\mu_0\ i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy\sin\theta}{l^2}$$

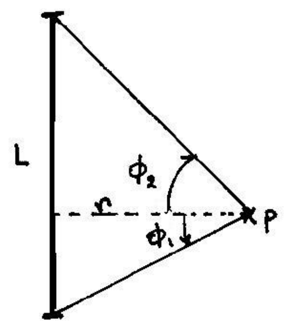
On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\sin\theta = \cos\phi \\ &y = r\ \mathrm{tg}\phi \qquad \text{d'où :} \qquad dy = \frac{r}{\cos^2\phi}d\phi \\ &l = r\ \cos\phi \end{aligned}$$

ce qui donne :

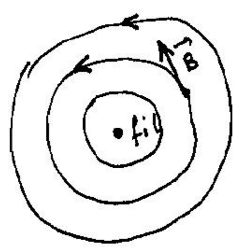
$$B = \frac{\mu_0\ i}{4\pi\ r}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\phi\ d\phi = \frac{\mu_0\ i}{2\pi\ r}$$

Si le fil est fini :



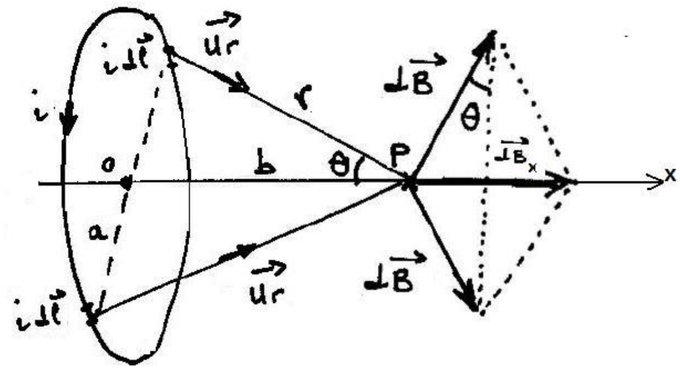
$$B = \frac{\mu_0\ i}{4\pi\ r}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\cos\phi\ d\phi = \frac{\mu_0\ i}{4\pi\ r}\ (\sin\phi_2 - \sin\phi_1)$$

Les lignes de champs magnétiques sont des cercles autour du fil conducteur. Elles se referment toutes sur elles mêmes.



b- Spire circulaire (ou dipôle magnetique)

On veut calculer le champ magnétique créé par le courant circulant dans la spire sur l'axe Ox.



On remarque que :
- $\vec{u_r}$ et $i\,\vec{dl}$ sont perpendiculaires
- par symétrie, le vecteur $\vec{B}$ est obligatoirement le long de l'axe Ox

On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\imath}\int dB_x = \vec{\imath}\int dB\ \sin\theta = \vec{\imath}\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dl\sin\theta}{r^2} \\ &= \vec{\imath}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\ \sin\theta}{r^2}\int dl = \vec{\imath}\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\ \sin\theta}{r^2}(2\pi a) = \frac{\mu_0}{2}\frac{i\ a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\,\vec{\imath}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i\ S}{(a^2+b^2)^{3/2}}\,\vec{\imath} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{M}{(a^2+b^2)^{3/2}}\,\vec{\imath}$$

où $S = \pi a^2$ désigne l'aire de la spire. Cette formule est analogue à celle d'un dipôle électrique obtenue précédemment où le moment magnétique de la spire est défini par $M = i\ S$.

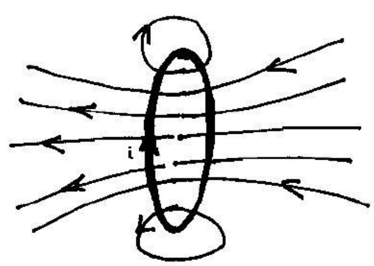
Cas particuliers :
- Au centre de la spire, $b = 0$, on a alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{a}\,\vec{\imath}$$

- si $b \gg a$, on a :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\frac{i\ a^2}{b^3}\,\vec{\imath}$$

Le vecteur $\vec{B}$ (et donc les lignes de champ magnétique) garde toujours la même direction.

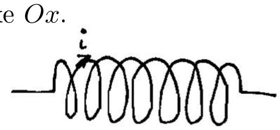


Pour N spires, le courant devient $I = N\, i$, et donc :

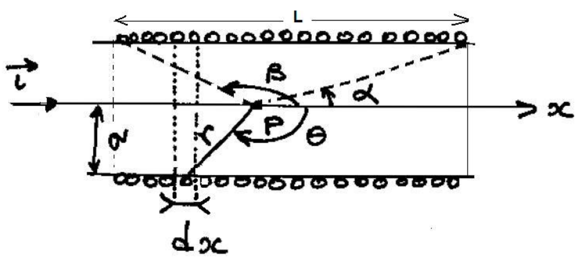
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{N\, i\, S}{(a^2 + b^2)^{3/2}}\, \vec{\imath}$$

c- Solénoide

On veut calculer le champ magnétique créé par le courant circulant dans le solénoide sur l'axe Ox.



Les données sur le solénoide sont :
- N spires
- Longueur L
- courant i dans chaque spire
- rayon a



Le courant traversant une portion dx de ce solénoide est :

$$dI = i \frac{N}{L}\, dx$$

Le champ magnétique élémentaire créé en un point de l'axe du solénoide par cette portion dx est :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{dI\; a\; \sin\theta}{r^2}\, \vec{\imath}$$

Le champ magnétique total est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\, i \frac{N}{L}\, a \int \frac{dx\; \sin\theta}{r^2}\, \vec{\imath}$$

En utilisant :

$$r\; \sin\theta = a$$
$$a\; \mathrm{cotg}\theta = x \qquad \text{qui donne :} \qquad dx = -\frac{a\, d\theta}{\sin^2\theta}$$

On obtient :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{2} \frac{N\, i}{L} \int_{\beta}^{\alpha} d\theta \sin\theta\, \vec{\imath} \qquad \text{ou :} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{N\, i}{L} (\cos\alpha - \cos\beta)\, \vec{\imath}$$

Cas particulier : si $L \gg a$ (solénoide long) :
- $\vec{B}$ au centre du solénoide ($\alpha = 0$ et $\beta = \pi$) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, Ni}{L} \vec{\imath}$$

- $\vec{B}$ à l'extremité ($\alpha = 0$ et $\beta = \pi/2$) ou ($\alpha = \pi/2$ et $\beta = \pi$) :

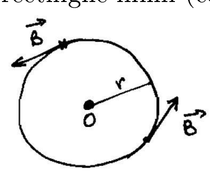
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \, Ni}{2L} \vec{\imath}$$

C) Théorème d'Ampère

Les lignes de champ magnétique pour le fil infini et pour la spire circulaire sont représentées sur les figures précédentes.

Calculons l'intégrale de chemin $\int \vec{dl} \cdot \vec{B}$ sur une ligne de champ quelconque. Cette ligne de champ est toujours fermée.

- Cas d'un fil rectiligne infini (cercle) :

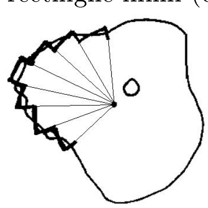


On sait que $B = \mu_0 \, i/(2\pi \, r)$, donc :

$$\int_{\text{cercle}} \vec{dl} \cdot \vec{B} = \oint dlB = \frac{\mu_0 \, i}{2\pi \, r} \oint dl = \mu_0 \, i$$

(le sens de i est important).

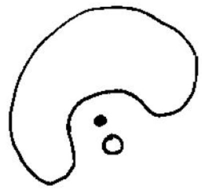
- Cas d'un fil rectiligne infini (chemin quelconque fermé entourant le fil) :



$$\oint \vec{dl} \cdot \vec{B} = \mu_0 \, i$$

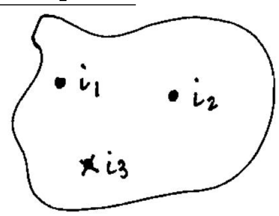
On peut déformer le chemin pour le remettre sous la forme d'un cercle car $\vec{B}$ est toujours perpendiculaire au rayon.

- Cas d'un fil infini (chemin fermé n'entourant pas le fil) :



$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = 0$$

Théorème d'Ampère :



En général, lorsque le chemin entoure plusieurs courants électriques circulant dans des sens différents, on a :

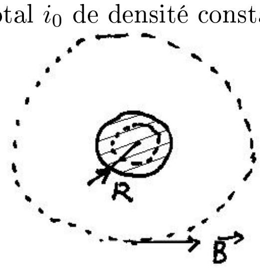
$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \sum i + \mu_0 \int i$$

Les valeurs des courants $i_1, i_2, \cdots$ sont des valeurs algébriques (et sont ajoutées avec leurs signes respectifs).

Ce théorème est l'analogue du théorème de Gauss en électrostatique.

a- Courant cylindrique

Un courant total i_0 de densité constante circule à travers un cylindre infini.

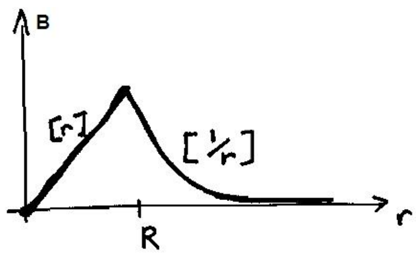


- Pour $r > R$

$$\int_{\text{cercle}} d\vec{l} \cdot \vec{B} = \mu_0 \int_{ext} di = \mu_0 \, i_0 = 2\pi r B \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi r}$$

- Pour $r < R$

$$2\pi r B = \mu_0 \int_{int} di = \mu_0 \, \frac{r^2}{R^2} \, i_0 \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi R^2} \, r$$

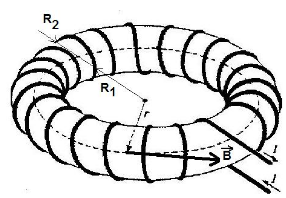


b- Solénoide

Si nous supposons que le solénoïde est très long par rapport à son rayon ($L \gg a$), le champ magnétique sera approximativement uniforme et parallèle à l'axe Ox à l'intérieur du solénoïde et sera nul en dehors du solénoïde. En appliquant le théorème d'Ampère, on retrouve alors le résultat donné auparavant :

$$B\ L = \mu_0\ N\ i \qquad \text{d'où :} \qquad B = \frac{\mu_0\ N\ i}{L}$$

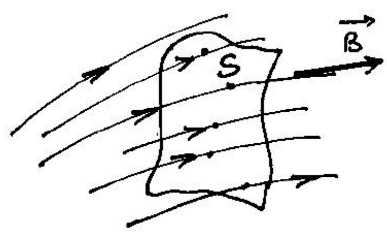
c- Toroide



On peut calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en utilisant le théorème d'Ampère :
- si $r < R_1$, un chemin intérieur n'entoure aucun courant donc : $\vec{B} = \vec{0}$
- si $r > R_2$, un chemin extérieur entoure des courants positifs et négatifs telle que leur somme s'annule, donc : $\vec{B} = \vec{0}$
- si $R_1 < r < R_2$, c'est à dire au centre du toroide :

$$B = \frac{\mu_0\ Ni}{2\pi\ r}$$

D) Flux magnétique



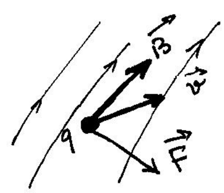
Le flux d'un champ magnétique, à travers une surface orientée S, est défini par :

$$\Phi_B = \int_S dS\ \vec{B} \cdot \vec{n}$$

Il sera utile dans la suite. L'unité utilisé pour le flux magnétique Φ_B est le Weber ($Wb = T \cdot m^{-2}$).

3) Force magnétique

A) Force de Lorentz



Supposons qu'une charge électrique q se trouve en un point P de l'espace et se déplace avec une vitesse $\vec{v}$.

En ce point P existe un champ électrique égale à $\vec{E}$ et un champ magnétique égale à $\vec{B}$.

La charge subit alors une force (appelée *force de Lorentz*) qui est due à ces deux champs (électrique et magnétique) et qui est donnée par :

$$\vec{F} = q\ (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

La force magnétique $\vec{F_M} = q\ \vec{v} \times \vec{B}$, est perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.

Le travail d'une force magnétique est donc toujours égale à zéro :

$$W = \int \vec{F_M} \cdot d\vec{l} = \int q\ (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\ dt = 0$$

La force magnétique n'influt que sur la direction de $\vec{v}$: $\quad d|\vec{v}|/dt = 0$.

Exemples :

Dans le cas où :

- la vitesse $\vec{v}$ de la charge est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$,
- B est constant en module,

la charge va effectuer un mouvement de rotation circulaire. La loi de Newton donne :

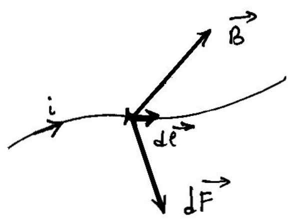
$$q\ v\ B = \frac{m\ v^2}{R} \qquad \text{d'où le rayon de la trajectoire circulaire :} \qquad R = \frac{mv}{qB}$$

La charge aura une fréquence de rotation (appelée *fréquence cyclotron*) constante égale à $\omega = q\ B/m$

Applications :
- Cyclotron
- Sélecteur de vitesse
- Effet Hall
- Bouteille magnétique, ...

B) Force magnétique sur un élement de courant. Force de Laplace

Lorsque des charges se déplace dans un conducteur en présence d'un champ magnétique, ces charges subissent les forces de Lorentz.



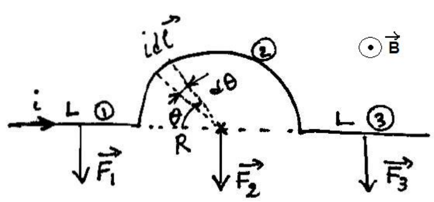
La force magnétique élémentaire $d\vec{F_M}$ sur les porteurs de charge qui occupent un volume élementaire $dV = S\ dl$ est donnée par :

$$d\vec{F_M} = \Delta q\ \vec{v_M} \times \vec{B} = (N\ e\ S\ dl)\ (\vec{v_M} \times \vec{B}) = (N\ e\ S\ v_M)\ (\vec{dl} \times \vec{B}) = i\ (\vec{dl} \times \vec{B})$$

La résultante de ces forces pour tout le conducteur est :

$$\vec{F_M} = \int d\vec{F_M} = \int_{\text{Conducteur}} i\ (\vec{dl} \times \vec{B})$$

a- Fil rigide



On néglige les forces de pesanteur. Considérons le système rigide de la figure traversé par un courant électrique constant i.

Ce système est placé dans un endroit de l'espace où est présent un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme (vecteur sortant sur la figure).

On peut calculer la force agissant sur chaque morceau qui compose le système :

$$\vec{F_1} = \int i\ \vec{dl} \times \vec{B} \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = \int i\ dl\ B = i\ B\ L$$

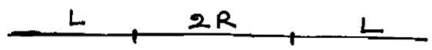
$$F_3 = i\ B\ L$$

$$F_2 = \int i\ dl\ B\ \sin\theta = i\ B\ \int d\theta\ R\ \sin\theta = i\ B\ R\ [-\cos\theta]_0^{\pi} = 2\ i\ B\ R$$

d'où :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \qquad \Rightarrow \qquad F = 2\ i\ B\ (L + R)$$

On trouve le même résultat qu'un fil rigide rectiligne de longueur $2\ (L + R)$.

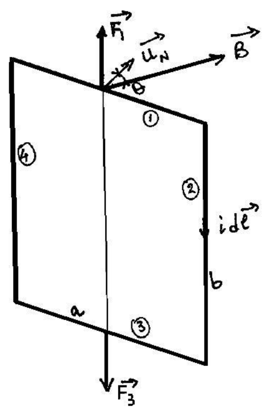


En général, si i et $\vec{B}$ sont constants :

$$\vec{F_M} = \int_A^B i\ (\vec{dl} \times \vec{B}) = i\ \left(\int_A^B \vec{dl}\right) \times \vec{B} = i\ \vec{AB} \times \vec{B}$$

b- Cadre rigide

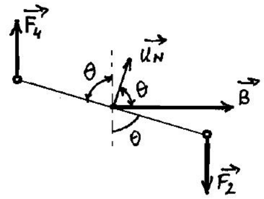
Dans un endroit de l'espace où est présent un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. On place un cadre rigide rectangulaire de largeur a et de longueur b traversé par un courant électrique constant i :



La résultante des quatre forces agissant sur le cadre s'annule :

Force sur ①: vers le haut $dF_1 = i\ dl\ B\ \cos\theta \quad \rightarrow \quad F_1 = i\ a\ B\ \cos\theta$
Force sur ③: vers le bas $dF_3 = i\ dl\ B\ \cos\theta \quad \rightarrow \quad F_3 = i\ a\ B\ \cos\theta$
Force sur ②: $F_2 = \int i\ dl\ B\ \sin\frac{\pi}{2} = i\ b\ B$
Force sur ④: $F_4 = \int i\ dl\ B\ \sin\frac{\pi}{2} = i\ b\ B$

Par contre le cadre peut tourner autour de son axe vertical. Calculons la résultante des moments des quatre forces par rapport à cet axe ($r = a/2$) :



$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F_2} + (-\vec{r}) \times \vec{F_4} = \vec{r} \times (\vec{F_2} - \vec{F_4}) = 2\,\vec{r} \times \vec{F_2}$$
$$\Gamma = i\ (ab)\ B\ \sin\ \theta = i\ S\ B\ \sin\ \theta = M\ B\ \sin\ \theta$$

M étant le moment magnétique du cadre. Le vecteur $\vec{M} = M\vec{u_N}$ est définie le long de la normale à la surface du cadre, donc $\Gamma = \vec{M} \times \vec{B}$.

On peut aussi calculer le travail effectué :

$$dW = \Gamma\ d\theta \qquad \rightarrow \quad W = \int_{\theta_0}^{\theta} \Gamma\ d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} M\ B\ \sin\ \theta\ d\theta = -M\ B\ (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Donc :

$$E_p(\theta) - E_p(\theta_0) = -M\ B\ (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

On peut définir l'énergie potentielle du cadre par :

$$E_p(\theta) = -M\ B\ \cos\theta = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

On a choisit : $Ep = 0$ pour $\theta = \pi/2$.