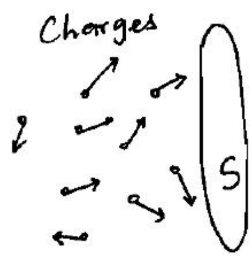
IV- Electrocinétique

L'électrocinétique s'intéresse au mouvement des charges électriques dans un milieu matériel contrairement à l'électrostatique qui étudie leur équilibre.

1) Courant électrique

A) Courant électrique



Losqu'il existe un mouvement de charge électriques à l'intérieur d'un conducteur, par définition, on appelle *courant électrique passant à travers une surface S donnée* la quantité de charge traversant cette surface par unité de temps. On écrit donc :

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt}$$

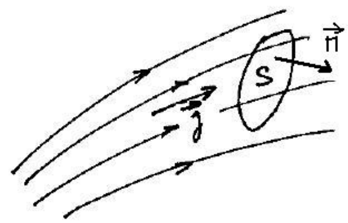
Le courant électrique se mesure en Ampère (A).

B) Densité de courant

On peut aussi exprimer le courant électrique par l'intermédiaire du *vecteur densité de courant $\vec{\jmath}$* qui est par définition la quantité de charge qui passe par unité de temps et par unité de surface dans une direction donnée de l'espace. On a donc :

$$i(t) = \int_S \vec{\jmath} \cdot \vec{n} dS$$

C'est le flux de charge à travers la surface S.



Le courant électrique $i(t)$ est une grandeur macroscopique, tandis que la densité de courant $\vec{\jmath}$ est une gradeur microscopique.

C) Etude microscopique

Le courant électrique est créé par un mouvement de charge dans le conducteur. On peut lui donner une interprétation avec un modèle microscopique, pour cela désignons par :

- N le nombre de porteurs de charge (en général des électrons) par unité de volume du conducteur,
- e la charge du porteur (pour l'électron $e = -1,6.10^{-19}\ C$),
- $\vec{v_M}$ la vitesse moyenne de diffusion des porteurs de charges (voir après),
- S la section du conducteur,
- Δt un intervalle de temps,
- Δq la charge qui a traversé S pendant l'intervalle de temps Δt.

On a alors :

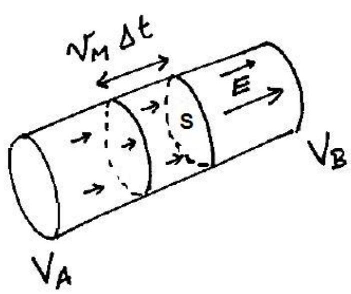
$$\Delta q = (N\ e)\ (S\ v_M\ \Delta t)$$

d'ou :

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = N\ e\ v_M\ S$$

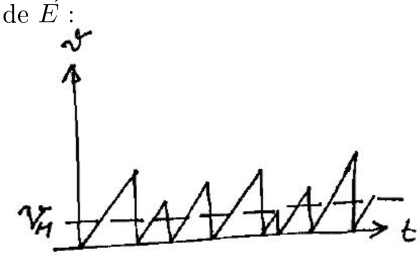
et :

$$\vec{\jmath} = Ne\vec{v_M}$$



Sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ uniforme, les porteurs de charge vont se déplacer dans la direction de $\vec{E}$ mais ils subissent à l'intérieur du conducteur des collisions multiples avec les atomes du conducteur et avec les autres porteurs de charges. Il s'en suit un mouvement désordonné de ces porteurs de charges.

La figure suivante montre le module de la vitesse d'un porteur de charge dans la direction de $\vec{E}$:



La pente des droites est égale à l'accélération d'un porteur de charge de masse m sous l'action du champ électrique uniforme $\vec{E}$:

$$\gamma = \frac{eE}{m}$$

Si on désigne par 2τ le temps moyen entre deux collisions, la vitesse varie alors entre deux valeurs

$$v_i = 0 \qquad \text{et :} \qquad v_f = (2\tau)\,\gamma = (2\tau)\,\frac{eE}{m}$$

La vitesse moyenne sera alors :

$$v_M = \frac{(v_i + v_f)}{2} = \frac{e\,E\,\tau}{m}$$

Donc :

$$i(t) = N\,e\,v_M\,S = \frac{N\,e^2\,E}{m}\,S\,\tau$$

ce qui donne pour la densité de courant :

$$j = \left(\frac{N\,e^2\,\tau}{m}\right)\,E = \sigma E$$

La quantité :

$$\sigma = \left(\frac{N\,e^2\,\tau}{m}\right)$$

s'appelle la *conductivité électrique* du conducteur, l'inverse $\rho = 1/\sigma$ s'appelle *résistivité électrique* du conducteur.

Ces deux quantités dépendent des propriétés du conducteur (τ, N, ...) et varient d'un conducteur à un autre. Elles peuvent aussi être fonctions de la température du conducteur, par exemple sous forme linéaire :

$$\rho(T) = \rho_0\,(1 + \alpha\,(T - T_0))$$

α s'appelle coefficient de température de la résistivité.

Pour des matériaux supraconducteurs, la résistance devient égale à zéro pour des températures inférieures à une température critique.

2) Loi d'Ohm

La loi d'Ohm est une conséquence de la relation $j = \sigma\ E$ qui est valable pour un certain type de matériau.

A) Fil conducteur

Considérons un fil conducteur de longueur L et de section S. On applique une différence de potentiel ΔV à ses deux extrémités.

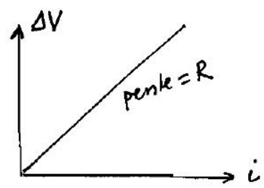
On a alors $\Delta V = E\ L$, qui donne :

$$i(t) = j\ S = (\sigma\ E)\ S = \sigma\ \frac{S\Delta V}{L}$$

On obtient alors l'expression de la loi d'Ohm :

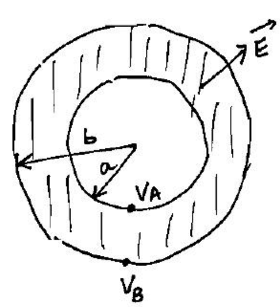
$$\Delta V = R\ i(t) \qquad \text{avec :} \qquad R = \frac{1}{\sigma}\ \frac{L}{S} = \rho\ \frac{L}{S}$$

R s'appelle la *résistance* du fil conducteur, elle est proportionnelle à sa longueur L et inversement proportionnelle à sa section S.



Remarque : Pour certains matériaux semiconducteurs la relation entre ΔV et i n'est plus linéaire (exemple : diodes à junction qui favorisent un sens pour le courant électrique).

B) Conducteur disque



Considérons maintenant un disque qui a une épaisseur h et une conductivité électrique σ.

Le courant électrique est radial :

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j\, dS = j \int dS = (\sigma E)\ (2\pi r h)$$

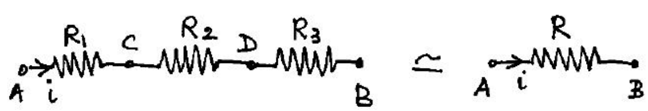
Le champ électrique $\vec{E}$ est radial : $E = -\frac{dV}{dr}$, donc $i = -(2\pi\sigma r h)\ \frac{dV}{dr}$. En intégrant, on obtient :

$$\int_{V_a}^{V_b} dV = -\int_a^b \frac{dr}{r}\ \frac{i}{2\pi\sigma h} \qquad \text{ou bien :} \qquad V_b - V_a = -\frac{i}{2\pi\sigma h} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

La résistance du disque est donc :

$$R = \frac{V_a - V_b}{i} = \frac{1}{2\pi\sigma h} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

C) Résistances en série



$$\begin{aligned} V_A - V_B &= (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B) \\ &= R_1\, i + R_2\, i + R_3\, i \\ &= R_{eq}\, i \end{aligned}$$

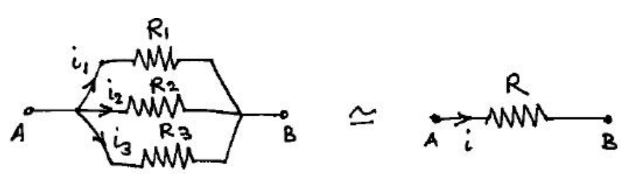
donc :

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

En général, on peut remplacer n résistances en série par une résistance équivalente R_{eq} :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

D) Résistances en paralléle



$$i \quad = \quad i_1 + i_2 + i_3 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

donc :

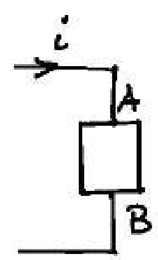
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

En général, on peut remplacer n résistances en paralléle par une résistance équivalente R_{eq} :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

3) Transfert d'énergie dans un circuit

On branche un recepteur électrique entre deux bornes électriques A et B (A est au potentiel V_A, B est au potentiel V_B). Ce récepteur convertit l'énergie électrique qu'il consomme en d'autres formes d'énergie (énergie thermique, énergie rayonnante, énergie mécanique, énergie chimique, ...). Un récepteur est dit *passif* si toute l'énergie qu'il reçoit est convertie en énergie thermique, *actif* sinon.



L'énergie reçue par un récepteur électrique est égale au travail nécessaire pour déplacer les charges de A vers B.

Un récepteur électrique parcouru, à un certain instant t, par un courant $i(t)$ de A vers B, pendant une durée Δt, reçoit une énergie électrique :

$$\Delta W = (V_A - V_B)\Delta Q = (V_A - V_B)\ i(t)\ \Delta t$$

La puissance électrique reçue est :

$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B)\ i(t)$$

Elle se mesure en Watt (W).

A) Premier cas : Résistance R entre A et B

Pour une résistance, la tension à ses bornes est proportionnelle à l'intensité du courant i qui la traverse de A vers B : $(V_A - V_B) = R\ i$.

L'énergie électrique reçue sera :

$$\Delta W = (V_A - V_B)\ i\ \Delta t = R\ i^2\ \Delta t$$

La puissance électrique reçue sera :

$$P = (V_A - V_B)\, i = R\, i^2$$

L'énergie électrique reçue par un conducteur ohmique est cédée à l'extérieur sous forme de chaleur et de rayonnement : c'est l'effet Joule.

Applications : Chauffage, éclairage, ...

B) Deuxième cas : Moteur entre A et B

Un moteur est un récepteur électrique qui fournit une puissance mécanique P' à l'extérieur. Il a une résistance interne r, il consomme donc par effet Joule une puissance $r\, i^2$.

On a alors :

$$(V_A - V_B)\, i = P' + r\, i^2$$

Si pose $e = P'/i$, qui s'appelle force la contre-électromotrice du moteur (elle se mesure en Volt), on aura :

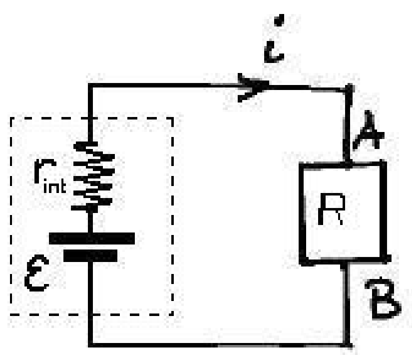
$$V_A - V_B = e + r\, i$$

Le rendement du moteur est donné par :

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{e}{V_A - V_B} = 1 - \frac{r\, i}{V_A - V_B}$$

C) Générateurs de courant

Un générateur de courant électrique (batterie, pile, ...) peut être défini par sa force électromotrice ϵ. Il a aussi une résistance interne r_{int}. Une partie de l'énergie sera consommée par effet joule dans cette résistance r_{int}.



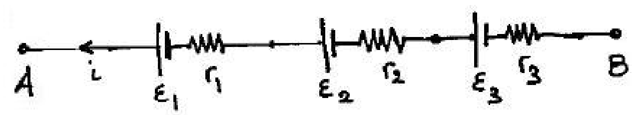
Par exemple, pour le circuit suivant, on a :

$$\epsilon i = r_{int}\, i^2 + R\, i^2 \qquad \text{ou bien :} \qquad V_A - V_B = R\, i = \epsilon - r_{int}\, i$$

la différence de potentiel entre A et B est toujours inférieure à la force électromotrice ϵ (qui est la valeur maximale de $V_A - V_B$).

D) Groupements de générateurs

a- Groupements de générateurs en série



$$V_A - V_B = +(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) - (r_1 + r_2 + r_3)\, i$$

On peut donc remplacer n générateurs en séries $(\epsilon_i, r_i), i = 1, \cdots, n$ par un générateur équivalent (E, R) tel que :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \qquad \text{et :} \qquad R = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

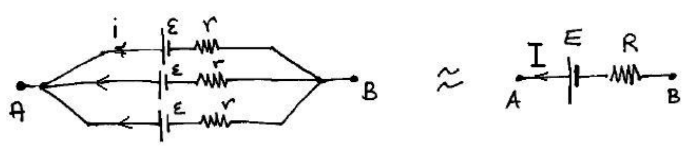
Dans le cas de générateurs similaires,

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \cdots = \epsilon \qquad \text{et :} \qquad r_1 = r_2 = \cdots = r$$

on aura :

$$E = n\, \epsilon \qquad \text{et :} \qquad R = n\, r$$

b- Groupements de générateurs en paralléle



Dans le cas de n générateurs similaires (ϵ, r), on aura :

$$i_1 = i_2 = \cdots = i \qquad \text{et :} \qquad V_A - V_B = \epsilon - r\, i$$

Pour le générateur équivalent (E, R) :

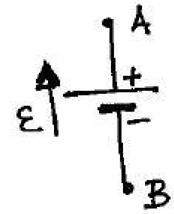
$$V_A - V_B = E - R\, I = E - R\, (ni)$$

Donc :

$$E = e \qquad \text{et :} \qquad R = \frac{r}{n}$$

4) Etude des circuits électriques

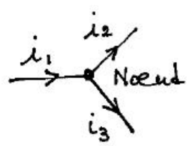
A) Conventions

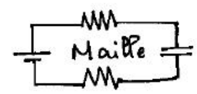


$V_A - V_B = +Ri$

$V_A - V_B = +\epsilon$
indépendamment du sens du courant

Définitions





B) Lois de Kirchhoff

En choisissant les conventions précédentes, on peut utiliser les lois de Kirchhoff pour calculer tous les courants et toutes les différences de potentiel dans un circuit.

- Loi des Noeuds :

$$\sum i = 0 \quad \text{sur chaque noeud}$$

avec un plus (+) pour un courant entrant, et un moins (-) pour un courant sortant.

- Loi des mailles :

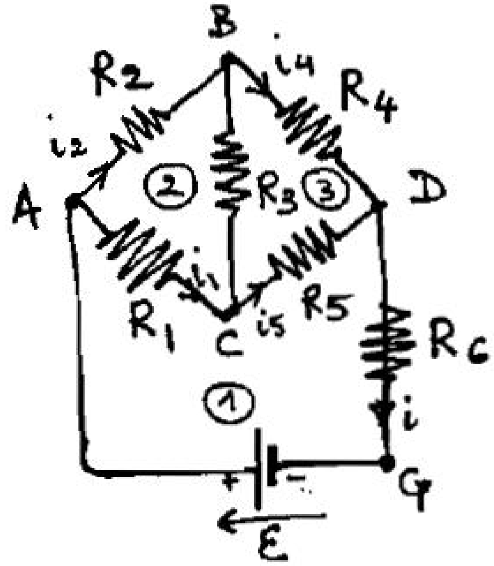
$$\sum \epsilon + \sum R\, i = 0 \quad \text{pour chaque maille}$$

après avoir défini un sens arbitraire du courant.

C) Applications

a- Exemple

On considère le circuit suivant :



Après avoir choisit un sens arbitraire pour les courants dans chaques branches du circuit,

- Les équations des noeuds sont :

$$\begin{array}{ll} A: & i - i_1 - i_2 = 0 \\ B: & i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\ C: & i_1 + i_3 - i_5 = 0 \\ D: & i_4 + i_5 - i = 0 \end{array}$$

- Les équations des mailles sont :

$$\begin{array}{ll} ①: & +R_1 i_1 + R_5 i_5 + R_6 i - \epsilon = 0 \\ ②: & +R_2 i_2 + R_3 i_3 - R_1 i_1 = 0 \\ ③: & -R_5 i_5 - R_3 i_3 + R_4 i_4 = 0 \end{array}$$

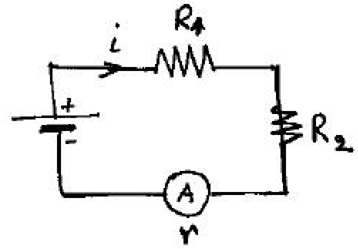
b- Remarque

La Methode de Crammer étudiée en Algèbre linéaire peut être utiliser pour résoudre les équations précédentes.

5) Mesures électriques

A) Mesure d'un courant électrique

On mesure un courant électrique avec par exemple un ampèremètre qui se branche en série :



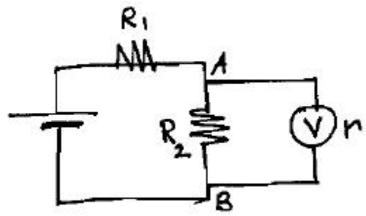
Pour le circuit, on a :

$$i = \frac{\epsilon}{R_1 + R_2 + r}$$

r est la résistance interne de l'ampèremètre. Un ampèremètre idéal correspond à $r \approx 0$.

B) Mesure d'une différence de potentiel

On mesure une différence de potentiel avec un voltmètre qui se branche en dérivation :

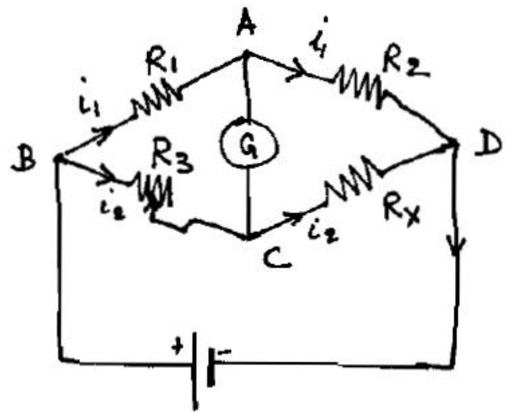


Pour le circuit, on a :

$$i = \epsilon / \left(R_1 + \frac{R_2\, r}{R_2 + r} \right)$$

r est la résistance interne du voltmètre. Un voltmètre idéal correspond à $r \to \infty$.

C) Mesure d'une résistance. Pont de Wheatstone



Le pont de Wheatstone est utilisée pour mesurer un résistance inconnue R_x, en ajustant une autre résistance R_3. Les résistances R_1 et R_2 sont connues.

Le pont sera en équilibre lorsque le courant dans le galvanomètre s'annulle $i_G = 0$, ce qui donne $V_A = V_C$.

Les lois de Kirchhoff donnent aussi :

$$\begin{array}{ll} (V_A - V_D) + (V_D - V_C) = 0 : & R_2 i_2 - R_x i_2 = 0 \\ (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = 0 : & -R_1 i_1 + R_3 i_2 = 0 \end{array}$$

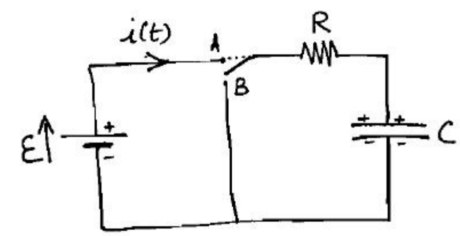
donc :

$$R_X = R_3 \frac{R2}{R1}$$

6) Circuits RC

A) Charge d'un condensateur

Considérons le circuit suivant (Interrupteur A fermé, Interrupteur B ouvert) :



On veut étudier la charge du condensateur C avec la *condition initiale* qu'à $t = 0$, la charge du condensateur est $q(t = 0) = 0$.

A un certain instant t quelconque, on a :

$$V_A - V_A = (V_A - V_D) + (V_D - V_C) + (V_C - V_A) = 0$$

$$R\,i(t) + \frac{q(t)}{C} - \epsilon = 0 \qquad \text{ou bien :} \qquad R\,\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} - \epsilon = 0$$

Les variables q et t se séparent :

$$\frac{dq}{q - \epsilon\,C} = -\frac{dt}{RC}$$

on intégre :

$$\int_0^q \frac{dq}{q-\epsilon\,C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \qquad \text{qui donne :} \qquad \ln(q-\epsilon\,C)|_0^q = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln(q-\epsilon\,C) - \ln(-\epsilon\,C) = \ln\left(\frac{q-\epsilon C}{-\epsilon C}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Finalement, on trouve :

$$q(t) = \epsilon C(1 - e^{-t/RC}) \qquad \text{et :} \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Remarques :

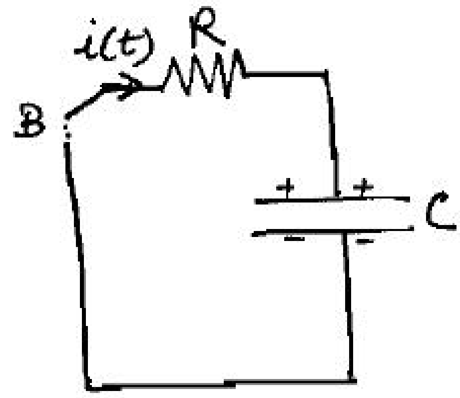
- Lorsque $t \to \infty$, $i(t) \to 0$ et $q(t) \to Q = \epsilon C$, la charge maximale du condensateur.
- Lorsque $t = RC$, la charge du condensateur a atteind la valeur :

  $$q(t = RC) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) Q \approx 0,67Q$$

  On appelle $\tau = RC$ la *constante de temps* du circuit.

B) Décharge d'un condensateur

Considérons le circuit (Interrupteur A ouvert, Interrupteur B fermé) :



L'étude de la décharge du condensateur C se fera maintenant avec la *condition initiale* qu'à $t = 0$, la charge du condensateur est $q(t=0) = Q = \epsilon C$.

A un certain instant t quelconque, on a :

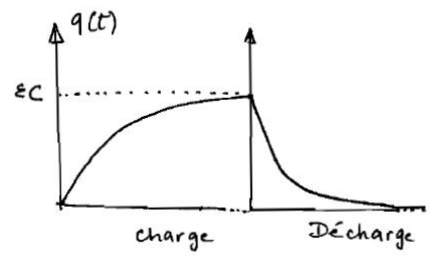
$$V_A - V_A = (V_A - V_D) + (V_D - V_A) = 0$$

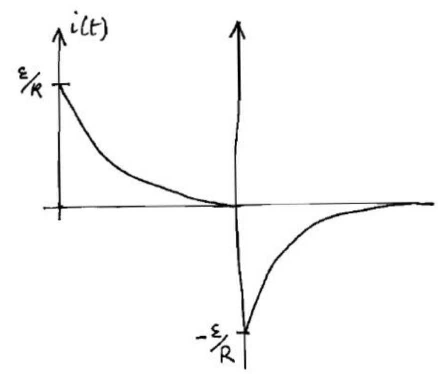
$$R\, i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \qquad \text{ou bien :} \qquad R\,\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \qquad \text{qu'on intégre :} \qquad \int_Q^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

qui donne :

$$q(t) = \epsilon C e^{-t/RC} \qquad \text{et :} \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$$



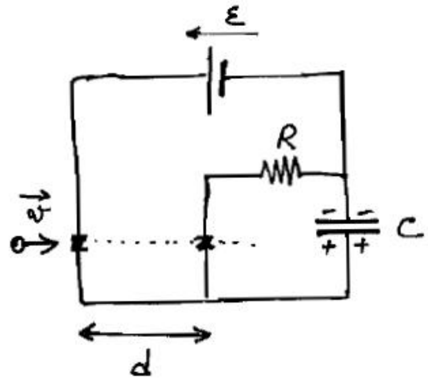


Remarques :

– Lorsque $t \to \infty$, $i(t) \to 0$ et $q(t) \to 0$, le condensateur se décharge.

– Lorsque $t = \tau$, la charge du condensateur a atteind $q(\tau) = Q/e \approx 0,33Q$.

C) Exercice de ballistique



Un balle ayant une vitesse v constante inconnue coupe deux fois le circuit de la figure lors de son déplacement (aux instants $t = 0$ et $t = T$).

En négligant l'effet de la pesanteur, calculer v ?

Le phénoméne physique qui se produit est la décharge du condensateur C entre les instants $t = 0$ et $t = T = \frac{d}{v}$.

On sait que

$$q(T) = \epsilon C \; e^{-T/RC} = \epsilon C \; e^{-d/RCv}$$

et que la différence de potentiel mesurée entre les bornes du condensateur à l'instant $t = T$ est

$$U = q(T)/C$$

D'où, l'expression de la vitesse de la balle en fonction de U :

$$v = \frac{d}{RC \ln(\epsilon/U)}$$

$(R, C, \epsilon$ et d sont connus).