III- Conducteurs en en équilibre électrostatique

1) Définition et propriétés

A) Définition

Dans un conducteur les charges sont mobiles et peuvent se déplacer lorsqu'elles sont soumises à un champ électrique (électrons libres dans un métal, ions positifs ou négatifs dans un liquide ou dans un gaz ...). Dans un isolant, les charges sont immobiles.

Un conducteur est dit *en équilibre électrostatique* lorsque les charges électriques à l'intérieur de ce conducteur ne se déplacent pas.

Cet état d'équilibre est atteind après que les charges se soient distribuées sur le conducteur puis immobilisées à partir d'un état initial. Cet configuration d'équilibre est unique.

B) Propriété 1 : Le champ est nul dans le conducteur

Le champ électrique $\vec{E} = \vec{0}$ en tout point intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique.

En effet, un champ électrique non nul mettrait les charges en mouvement en contradiction avec l'hypothèse faite de l'équilibre électrostatique et de l'immobilité des charges.

C) Propriété 2 : Le potentiel est constant dans le conducteur

Le potentiel à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique est constant. Le volume intérieur du conducteur est donc un volume équipotentiel.

En effet, si on prend deux point (A et B) à l'intérieur du conducteur, l'intégrale de chemin sur une courbe C joignant ces points :

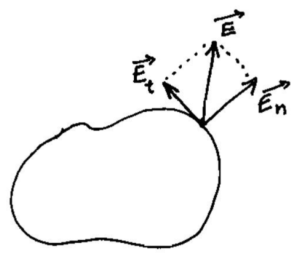
$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

car $\vec{E} = \vec{0}$ sur ce chemin C (Propriété 1), donc on a bien que $V_A = V_B$ à l'intérieur du conducteur.

D) Propriété 3 : $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface du conducteur

Sur la surface du conducteur, il faut que le champ électrique soit perpendiculaire à la surface extérieur du conducteur.

En effet, si le champ électrique a une composante tangentielle $\vec{E_t}$ non nulle, les charges électriques peuvent se déplacer tangentiellement à la surface ce qui est contraire à l'hypothèse de l'équilibre électrostatique et de l'immobilité des charges.



E) Propriété 4 : La surface du conducteur est une région equipotentielle

Le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface extérieure du conducteur. Les lignes de champ quittent le conducteur en lui étant perpendiculaires, donc :

$$V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

car $\vec{E}$ est toujours perpendiculaire au vecteur déplacement $d\vec{l}$ sur la surface extérieure.

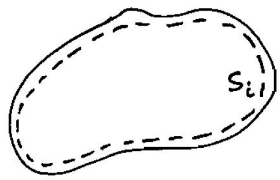
F) Propriété 5 : Toutes les charges se mettent à la surface du conducteur

Si le conducteur porte une charge électrique, cette charge se répartit sur la surface extérieur du conducteur. Il n'y a pas de charges à l'intérieur du conducteur.

Ce résultat vient de l'application du théorème de Gauss à une surface fermée S_i intérieure au conducteur :

$$\Phi = \oiint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} = 0$$

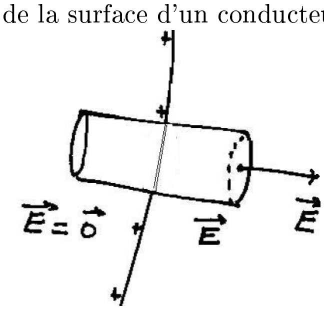
car $\vec{E} = 0$ à l'intérieur, donc $Q_i = 0$: il n'y a pas de charge dans le volume intérieur au conducteur. Les charges portées par le conducteur ne peuvent être que sur la surface extérieur du conducteur.



Application : Générateur électrostatique de van de Graaff.

G) Valeur du champ électrique à la surface du conducteur

Une formule simple (théorème de Coulomb) donne le champ électrique aux points proches de la surface d'un conducteur.



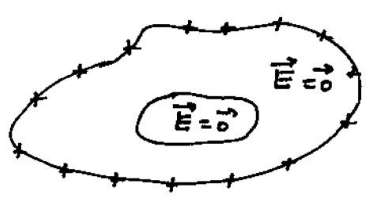
Appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée représentée sur la figure (tube élémentaire perpendiculaire à la surface du conducteur).

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{n} dS = EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \qquad \text{donc : } \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En désignant par $\vec{u_n}$ le vecteur unitaire normal à la surface, on aura donc :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u_n}$$

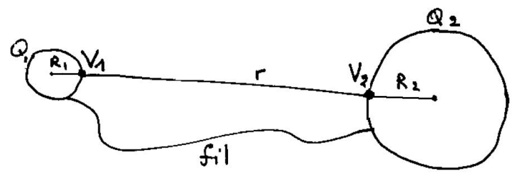
H) Conducteur creux



On peut refaire les mêmes raisonnements que précédemment. Les charges se répartissent uniquement sur la surface extérieur du conducteur. Il n'y a pas de charges sur la surface intérieure.

Application : Cage de Faraday, isolation d'antennes, ...

I) Distribution de charge sur un conducteur (Effet de pointe)



Considérons deux conducteurs sphériques de rayons R_1 et R_2 portant des charges Q_1 et Q_2. Ces deux conducteurs sont placés à une distance r très grande devant R_1 et R_2. Ils sont reliés par un fil conducteur portant une charge négligeable, ils se trouvent donc au même potentiel électrique.

Le premier conducteur se trouve au potentiel :

$$V_1 \simeq \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le second au potentiel :

$$V_2 \simeq \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V_1 = V_2 \qquad \text{donne :} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}\frac{(r-R_2)}{(r-R_1)} \simeq \frac{R_1}{R_2}$$

- Si $V_1 = V_2 = 0$ alors $Q_1 = Q_2 = 0$.
- Sinon, si σ_1 et σ_2 désignent les densités surfacique de charge sur les sphères : $Q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1$ et $Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2$, on aura :

$$\frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = \frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2} \qquad \text{soit :} \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

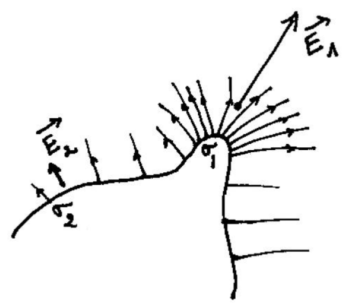
Et puisque $E = \sigma/\epsilon_0$, on voit que :

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

Puisque $R_1/R_2 > 1$, le champ au voisinage du second conducteur est plus intense que le champ au voisinage du premier conducteur.

Ce phénomème s'appelle *effet de pointe* : le champ est plus important dans les régions du conducteur ayant des petits rayons de courbure. Lorsque le conducteur est sphérique, la densité de charge sera uniforme.

Application : Paratonnerre, ...



J) Capacité d'un conducteur isolé

La charge Q d'un conducteur isolé (éloigné de tout autre conducteur) est proportionnelle à son potentiel V, on peut écrire :

$$Q = C_i \ V$$

Le coefficient de proportionnalité C_i est appelé capacité de charge du conducteur isolé. Elle ne dépend que de sa géométrie et s'exprime en farads.

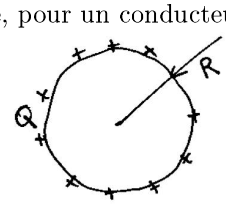
1 *Farad* correspond à une charge de 1 *Coulomb* quand le potentiel est de 1 *Volt*. mais, on utilise plutôt des sous-multiples du Farad :

$$1\mu F \ (microfarad) = 10^{-6} F$$

$$1nF \ (nanofarad) = 10^{-9} F$$

$$1pF \ (picofarad) = 10^{-12} F$$

Par exemple, pour un conducteur sphérique (on a choisit $V(\infty) = 0$) :

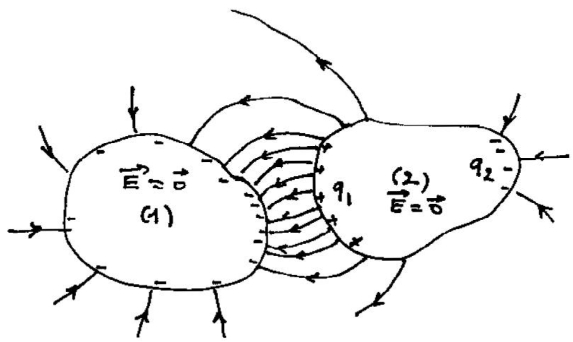


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \qquad \text{ce qui donne :} \quad C_i = 4\pi\epsilon_0 R$$

2) Cas de plusieurs conducteurs en équilibre

L'état d'équilibre électrostatique de n conducteurs est défini par l'état stationnaire de charge et de champ électrostatique qui existe après que les charges se soient distribuées sur les conducteurs puis immobilisées. Cet état d'équilibre est unique.

A) Système de deux conducteurs



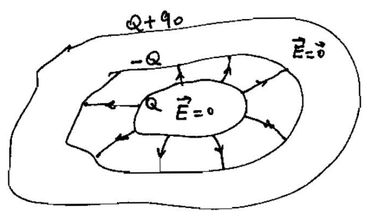
Les charges dans le conducteur isolé (2) se séparent et se répartissent comme le montre la figure. Si le conducteur est neutre, on aura $q_1 + q_2 = 0$, s'il porte une charge q_0, on aura $q_1 + q_2 = q_0$.

B) Conducteurs en influence totale

Lorsque le conducteur isolé (2) entoure totalement le conducteur (1), on dira que les conducteurs sont en influence totale.

Ceci signifie que toutes les lignes de champ issues du premier conducteur atteignent le second.

Les charges se répartissent comme le montre la figure : $+Q$ sur la surface extérieur du conducteur (1) et $-Q$ sur la surface intérieur du conducteur (2).



C) Condensateurs

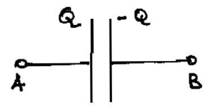
Définition : On appelle condensateur un ensemble de 2 conducteurs A et B en influence totale. Ces deux conducteurs sont appelés armatures du condensateur.

Il apparaît un champ élecrique $\vec{E}$ dans l'espace compris entre les armatures et donc une différence de potentiel $V_A - V_B$ entre A et B. On appelle capacité du condensateur C la quantité :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

C ne dépend que de la géométrie du conducteur. L'unité de capacité est le Farad (F).

Le symbole utilisé pour un condensateur est :



D) Calcul de capacité

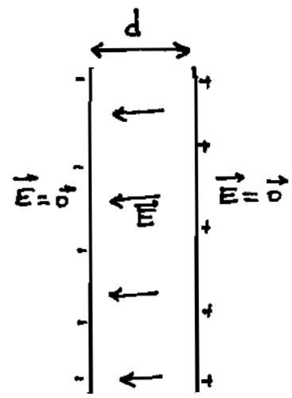
Lorsque le système d'armatures possède une symétrie, on peut calculer la capacité du condensateur comme suit :

- On suppose une charge positive Q sur l'armature A,
- On calcule le champ $\vec{E}$ entre les armatures en s'aidant du théorème de Gauss,
- On calcule la différence de potentiel : $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$,
- La capacité du condensateur est alors donnée par le rapport : $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$.

<u>Exemples</u>

- <u>Condensateur plan</u>

  On considère deux conducteurs plans infinis chargés. La distance entre ces deux plans est d. La densité de charge surfacique étant σ.



$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int \vec{E} d\vec{l} = +\int_0^d E\, dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

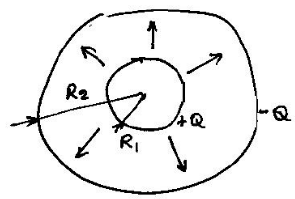
Cette relation reste approximativement valable pour deux plans finis de surface A et de charge totale Q, on a alors :

$$\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

qui donne :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

– Condensateur sphérique

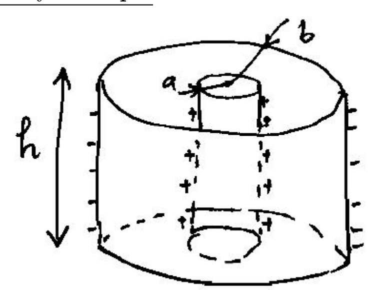


$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int \vec{E}\vec{dl} = -\int_{R_2}^{R_1} E\, dr = +\int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\, dr$$

$$V_+ - V_- = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$$

– Condensateur cylindrique

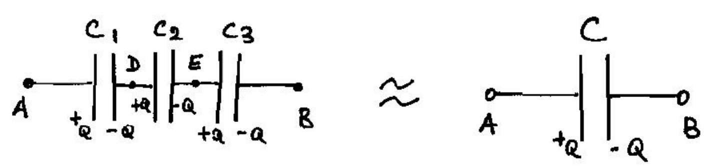


On suppose h très grand devant les rayons a et b.

$$E = \frac{Q}{2\pi h\epsilon_0}\frac{1}{r} \qquad \text{d'où :} \quad C = \frac{2\pi h\epsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

E) Condensateurs en séries

Lorsque plusieurs condensateurs sont mis en séries, on peut les remplacer par un condensateur équivalent C de la manière suivante :



$$V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_E) + (V_E - V_B) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = \frac{Q}{C}$$

d'où :

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C}$$

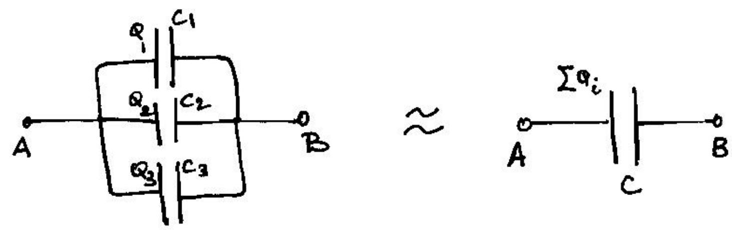
Pour n condensateurs en séries :

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Application : Diviseur de potentiel : $V_{AD}/V_{DE} = C_2/C_1$

F) Condensateurs en parallèles

Lorsque plusieurs condensateurs sont mis en paralléles, on peut les remplacer par un condensateur équivalent C de la manière suivante :



$$V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1 + C_2 + C_3}$$

d'où :

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Pour n condensateurs en paralléles :

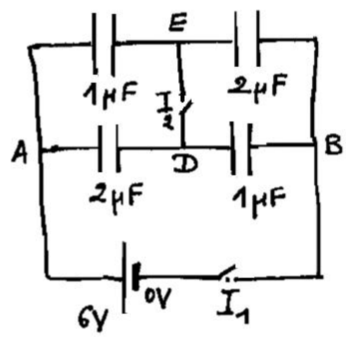
$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Application : Diviseur de charges : $Q_1/Q_2 = C_1/C_2$

G) Circuits de condensateurs

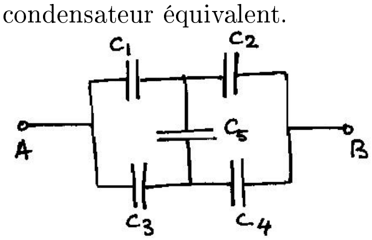
Lorsqu'un circuit comporte plusieurs condensateurs, on peut le simplifier en introduisant des condensateurs équivalents.

Exemple 1 :



Simplifier le circuit pour :
- I_1 fermé
- I_1 fermé et I_2 fermé

Exemple 2 : Ces condensateurs ne sont ni en série ni en paralléle, mais on peut trouver un condensateur équivalent.



3) Energie emmagasinée dans un condensateur

A) Energie électrostatique

On peut charger un condensateur en branchant un générateur entre ses armatures. Ce générateur fait passer des charges d'une armature à l'autre. Il s'ensuit une augmentation de l'énergie potentielle électrostatique du condensateur.

Pour calculer cette énergie, on suppose que q est la charge du condensateur à un certain instant pendant la charge du condensateur. A cet instant, la différence de potentiel entre la deux armatures est $\Delta V = q/C$.

La variation dU de l'énergie potentielle, lorsque la charge de l'armature (A) passe de la valeur q à la valeur très voisine $q + dq$ est donnée par :

$$dU = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

L'énergie U emmagasinée dans le condensateur, lorsque la charge de l'armature (A) passe de la valeur zéro (condensateur déchargé) à une valeur Q, s'obtient en faisant la somme des variations élémentaires dU :

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

On peut exprimer cette énergie en fonction de la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre les armatures, on a :

$$Q = C(V_A - V_B)$$

On obtient donc :

$$U = \frac{1}{2}C(V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2}Q(V_A - V_B)$$

B) Densité d'energie

On peut considérer que l'énergie électrostatique d'un condensateur est emmagasinée par le champ électrique $\vec{E}$ dans le volume qu'il occupe dans l'espace. On introduit pour celà la densité d'énergie du champ électrique $\vec{E}$ par unité de volume :

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

L'énergie électrostatique emmagasinée par le champ électrique sera :

$$U = \int_{\text{Tout l'espace}} dV \;\; u_E$$

Cette formule est toujours applicable quel que soit le champ électrique.

Exemples

1. Condensateur plan : (surface A, écartement d entre les armatures)
   Dans ce cas, le champ électrique (qui est approximativement) constant $E = \sigma/\epsilon_0$ occupe un volume $A\ d$.
   Donc, l'énergie électrostatique emmagasinée sera :

   $$U = (A\ d)\ \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = (A\ d)\ \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

   qui est bien en accord avec :

   $$U = \frac{Q^2}{2C}$$

2. Conducteur sphérique isolé de rayon R portant une charge totale Q sur sa surface
   Dans ce cas, le champ électrique radial est :
   - pour $r < R$: $\vec{E} = \vec{0}$
   - pour $r > R$: $\vec{E} = \frac{k\ Q}{r^2}\vec{u_r}$
   Donc, l'énergie électrostatique emmagasinée sera :

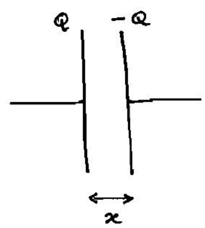
   $$U = \int_{\text{Espace}} dV\ \frac{1}{2}\epsilon_0\ E^2 = \int_r^{\infty} (4\pi\ r^2\ dr)\frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{k\ Q}{r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0\ R)} = \frac{Q^2}{2C}$$

   Ce qui est compatible avec la capacité $C = 4\pi\epsilon_0\ R$ d'un conducteur sphérique isolé calculée précedemment (section 1.J).

3. Faire le même calcul avec conducteur sphérique isolé de rayon R portant une charge totale Q uniformément distribuée sur son volume, on trouvera :

$$C = \frac{10}{3}\pi\epsilon_0 \; R$$

C) Pression électrostatique



On considère un condensateur plan (surface A, écartement x entre les armatures). Les deux armatures étant chargés positivement et négativement, une force d'attraction électrique apparaît.

On veut calculer cette force d'attraction F entre les deux armatures de ce condensateur. Cette force est normale à la surface.

On ecarte les armatures d'une certaine distance infinitésimale supplémentaire dx ($x \to x + dx$), le travail effectué sera $dW = F \; dx$ qui sera égale à la variation dU de l'énergie électrostatique du condensateur.

On sait que cette énergie électrostatique pour un condensateur plan est :

$$U = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \; (A \; x)$$

donc la force d'attraction entre les deux armatures est donnée par :

$$F = \frac{dU}{dx} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \; A$$

Elle peut être considérer comme une pression (force par unité de surface) qui s'exerce sur les armatures :

$$p = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Cette pression s'appelle *pression électrostatique*.

4) Capacités avec diélectriques

Un diélectrique est un matériau non conducteur comme par exemple le verre, le caoutchouc, ...

Lorsqu'un diélectrique est inséré dans tout l'espace entre les armatures d'un condensateur, la capacité du condensateur augmente, elle est multiplié par un facteur κ appelé *constante diélectrique* du matériau :

$$C = \kappa \; C_0$$

C_0 est la capacité du condensateur sans le diélectrique.

κ varie d'un matériau à un autre, par exemple :

Matériau	Constante diélectrique	$E_{Max}(10^6\ V/m)$
Vide	1	
Air (sec)	1.00059	3
Bakelite (sec)	4.9	24
Mylar	3.2	7
Nylon	3.4	14
Porcelaine	6	12
Verre Pyrex	5.6	14
Papier	3.7	16

On a aussi donné dans le tableau les valeurs du champ électrique maximale E_{Max} qui peut être supporté par le diélectrique.