

Structures de données avancées :

Les arbres B⁺

Pr ZEGOUR DJAMEL EDDINE
Ecole Supérieure d'Informatique (ESI)
www.zegour.univ.dz
email: d_zegour@esi.dz

B+-Tree

Définition

Un arbre de recherche m-aire équilibré d'ordre M ($M > 3$)

Les feuilles contiennent les articles

Chaque feuille a entre $\lceil L/2 \rceil$ et L articles (généralement $L \ll M$ en pratique)

Les noeuds internes contiennent les clés de recherche

Chaque noeud interne a entre $\lceil M/2 \rceil$ et M fils

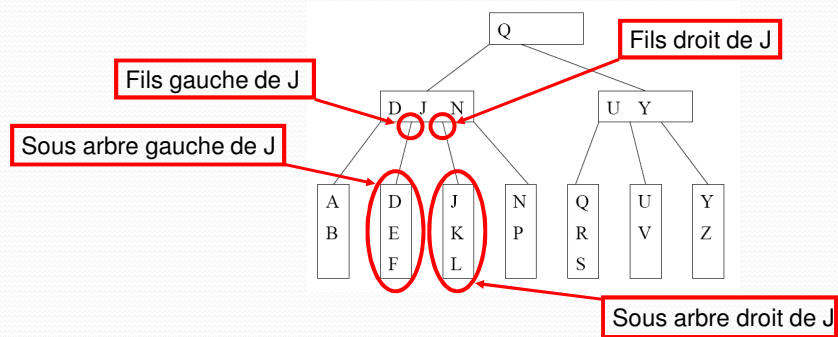
Chaque noeud interne a entre $\lceil (M/2) - 1 \rceil$ et (M-1) clés de recherche

Clé I est la plus petite clé dans le sous arbre $i+1$

La racine : simple feuille ou un noeud interne avec 2 à M fils

B+-Tree

Exemple ($M = L = 4$)



Les articles sont au niveau des feuilles // Les noeuds sont remplis à 70%

B+-Tree

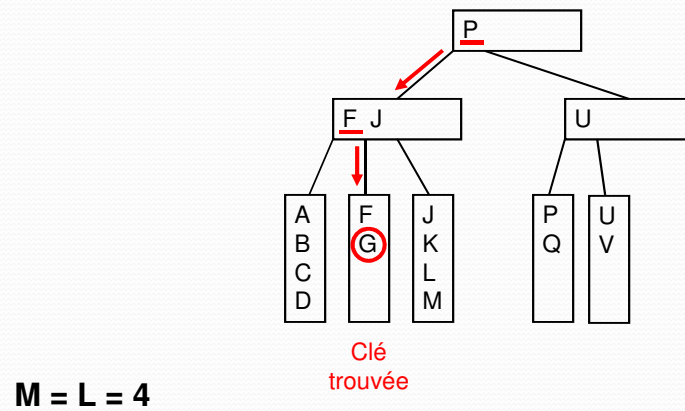
Utilisation

Un noeud ou une feuille = bloc sur le disque

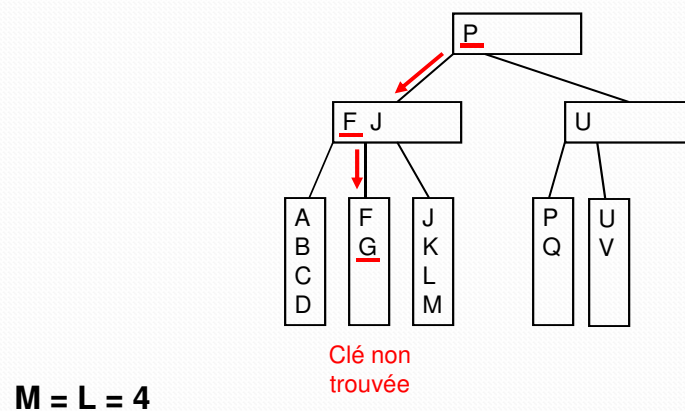
Bloc : unité de transfert entre RAM et disque
→ diminue la profondeur et donc les accès disque

1 ou 2 niveaux de l'arbre sont rangés en RAM pour accélérer les opérations

B+-Tree

Recherche/ Rechercher G

B+-Tree

Rechercher H

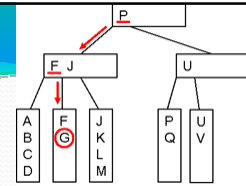
B+-Tree

Recherche/Principe

Comme dans un B-arbre

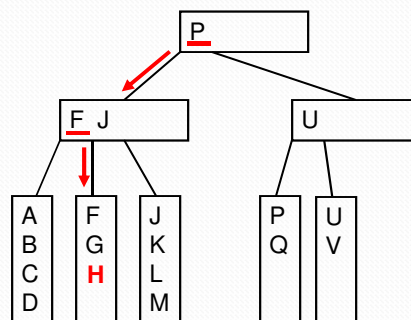
La recherche s'arrête toujours au niveau de la feuille
(Signe < remplacé par \leq)

A l'intérieur d'un noeud : recherche séquentielle ou dichotomique



B+-Tree

Insertion/ Insérer H



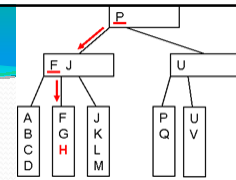
$M = L = 4$

B+-Tree

Insertion/Principe

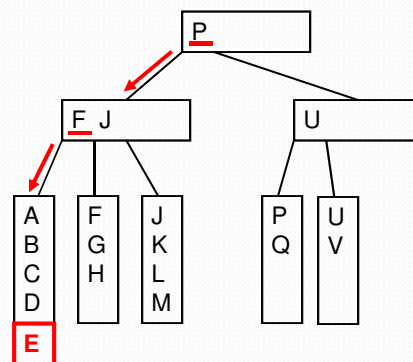
Rechercher la clé K (à insérer)
Si non trouvée, on est sur une feuille

Si la feuille contient moins de L clés, insérer la clé
Sinon **Eclatement**



B+-Tree

Insérer E (éclatement)



$M = L = 4$

B+-Tree

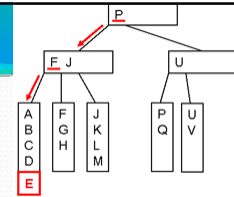
Eclatement d'une feuille

Diviser la feuille en deux

Feuille gauche : $\lfloor (L+1)/2 \rfloor$ plus petites clés

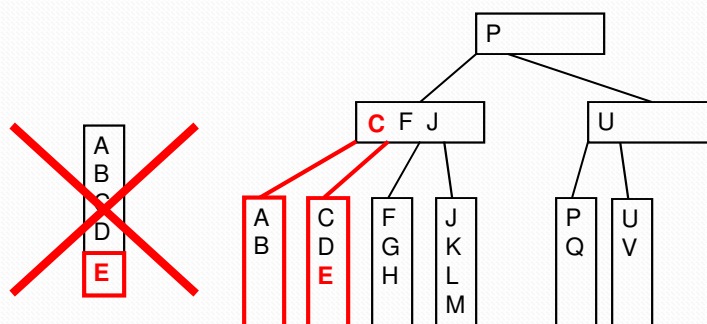
Feuille droite : $\lfloor (L+1)/2 \rfloor$ autres

Copier la plus clé de la feuille droite dans le noeud parent comme clé séparatrice entre les deux feuilles



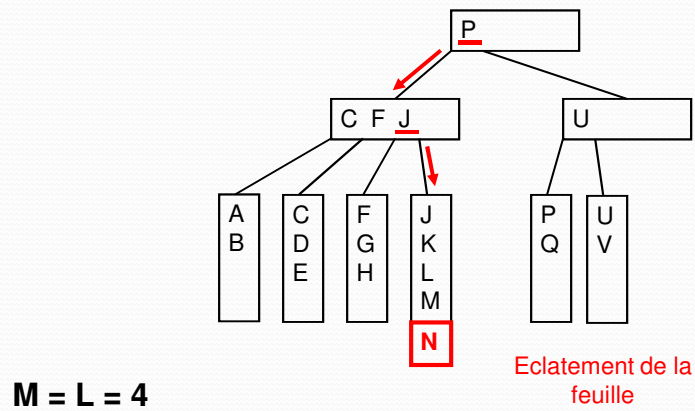
B+-Tree

Insérer E (éclatement)

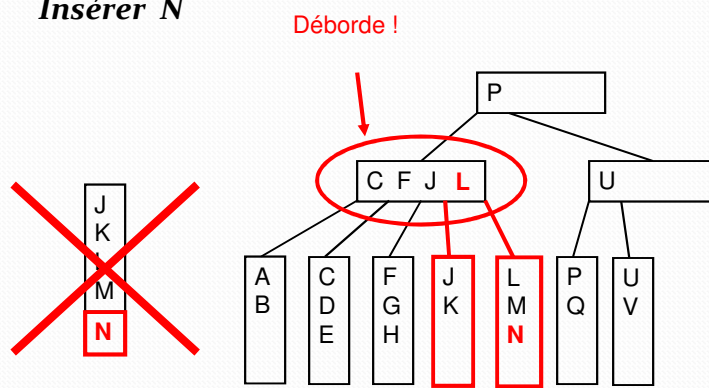


M = L = 4

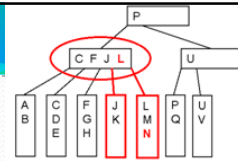
B+-Tree

Insérer N

B+-Tree

Insérer N

B+-Tree



Eclatement d'un noeud interne

Diviser le noeud en deux

Noeud gauche : les plus petites $\lceil M/2 \rceil - 1$ clés

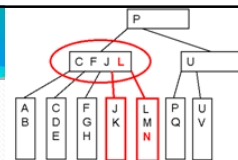
Noeud à droite : les plus grandes $\lfloor M/2 \rfloor$ clés

Noter que la $\lceil M/2 \rceil$ -ième clé n'est pas dans les deux noeuds

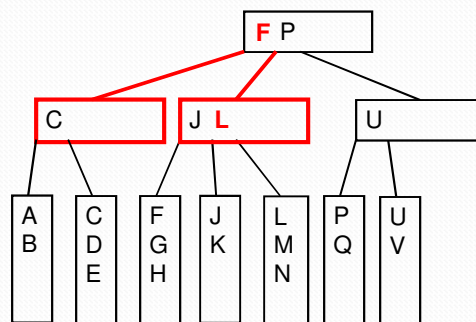
Car $(\lceil M/2 \rceil - 1) + (\lfloor M/2 \rfloor) = \lceil M/2 \rceil + \lfloor M/2 \rfloor - 1 = M - 1$

Déplacer la $\lceil M/2 \rceil$ -ième clé dans le noeud parent comme clé séparatrice

B+-Tree



Insérer N



$M = L = 4$

B+-Tree

Eclatement de la racine

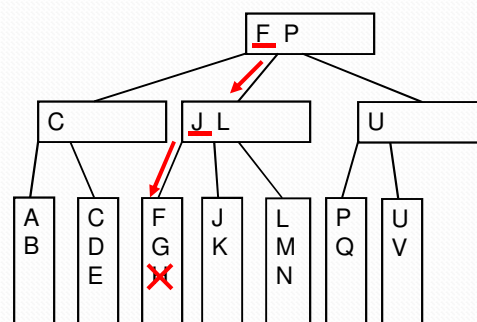
Comme l'éclatement d'un noeud interne

Créer une nouvelle racine avec la seule clé séparatrice

Le niveau de l'arbre augmente d'une unité

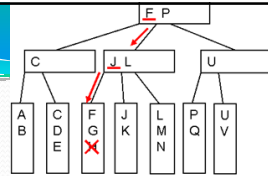
B+-Tree

Suppression/ Supprimer H



M = L = 4

B+-Tree



Suppression/Principe 1

Rechercher la clé (niveau feuille)

Supprimer la clé de cette feuille

Si la clé figure dans un ascendant (noeud interne) , la remplacer par la nouvelle plus petite clé dans cette feuille

Si de plus, cette feuille contient moins de $\lceil L/2 \rceil$ keys, **Emprunt**

B+-Tree

Emprunt (Niveau feuille)

Cas 1: si le fils droit contient un nombre de clés $\geq (\lceil L/2 \rceil + 1)$

Emprunter la plus petite clé

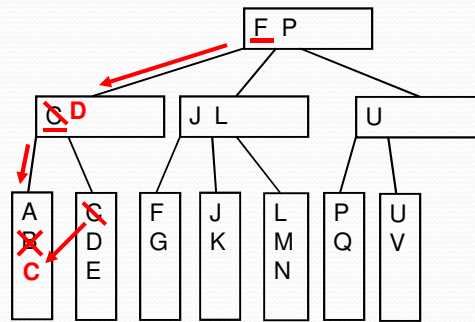
Cas 2: si le fils gauche contient un nombre de clés $\geq (\lceil L/2 \rceil + 1)$

Emprunter la plus grande clé

Mettre à jour la clé séparatrice dans le noeud parent.

B+-Tree

Supprimer B (Emprunt)



M = L = 4

B+-Tree

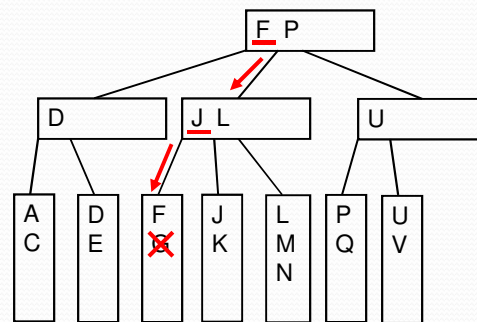
Suppression/Principe 2

Si les deux fils ont exactement $\lceil L/2 \rceil$ clés, l'emprunt n'est pas possible.

→ **Fusionner** les deux feuilles

B+-Tree

Supprimer G

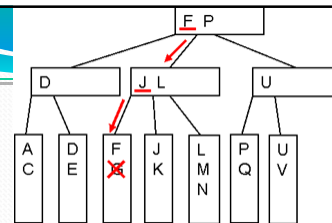


Emprunt
impossible

$M = L = 4$

B+-Tree

Fusion (Niveau feuille)



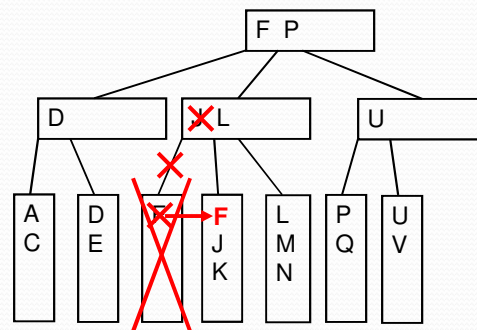
Déplacer toutes les clés dans la feuille courante vers la feuille soeur

Supprimer le pointeur dans le noeud parent qui pointe la feuille courante

Supprimer la clé séparatrice dans le noeud parent entre les deux feuilles

B+-Tree

Supprimer G (Fusion)



M = L = 4

B+-Tree

Suppression/Principe 3

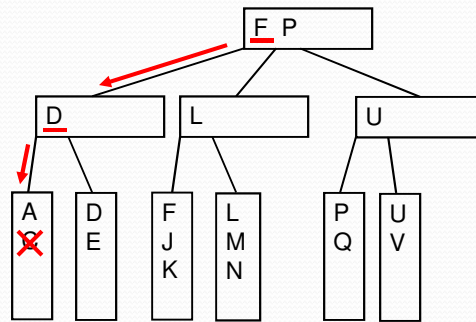
Cas des noeud internes :

D'abord essayer l'emprunt

Si ce n'est pas possible, fusionner 2 noeud internes

B+-Tree

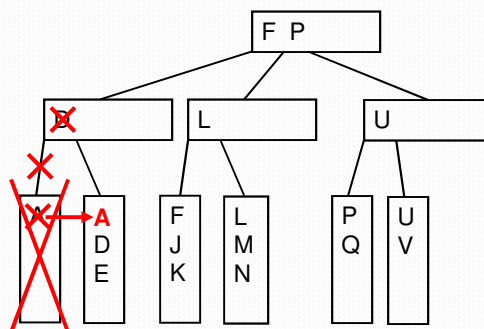
Supprimer C (Fusion de noeuds internes)



M = L = 4

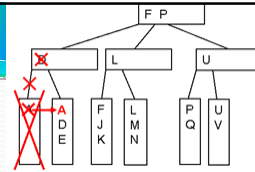
B+-Tree

Supprimer C



M = L = 4

B+-Tree



Fusion de 2 noeuds internes

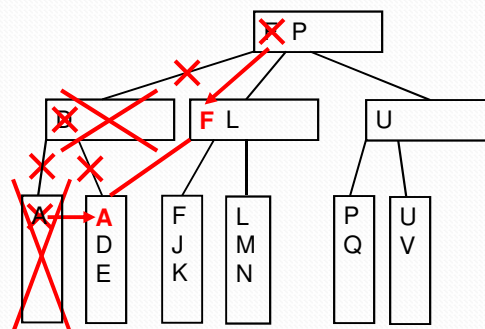
Déplacer la clé séparatrice entre le noeud courant et le noeud frère vers le noeud frère

Déplacer toutes les clés et pointeurs du noeud courant vers le noeud frère

Supprimer le pointeur vers le noeud courant dans le noeud père

B+-Tree

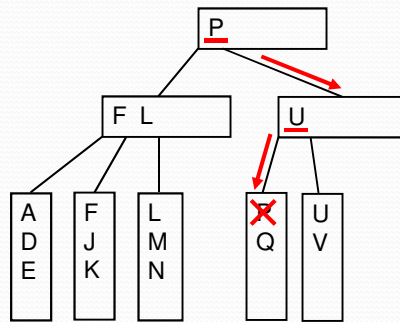
Supprimer C



M = L = 4

B+-Tree

Supprimer P (Emprunt entre 2 noeuds internes)



M = L = 4

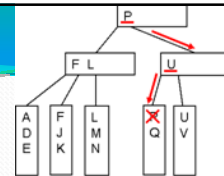
B+-Tree

Emprunt (cas des noeuds internes)

Déplacer la clé séparatrice entre le noeud courant le noeud frère vers ce noeud frère

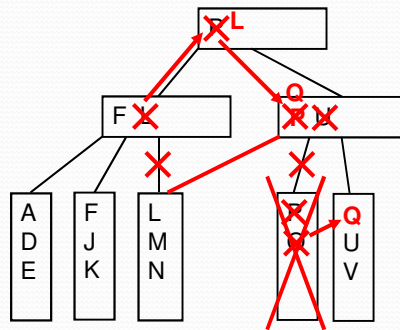
Faire du fils le plus à gauche (le plus à droite) du noeud frère le fils le plus à droite (plus à gauche) du noeud courant

Déplacer la clé la plus à gauche (plus à droite) du noeud frère vers le noeud parent pour devenir la clé séparatrice entre le noeud courant et le noeud frère



B+-Tree

Supprimer P



M = L = 4

B+-Tree

Suppression/Principe 4

Cas où la racine devient vide lors des fusions en cascade

→ Faire du seul fils qui reste la nouvelle racine de l'arbre