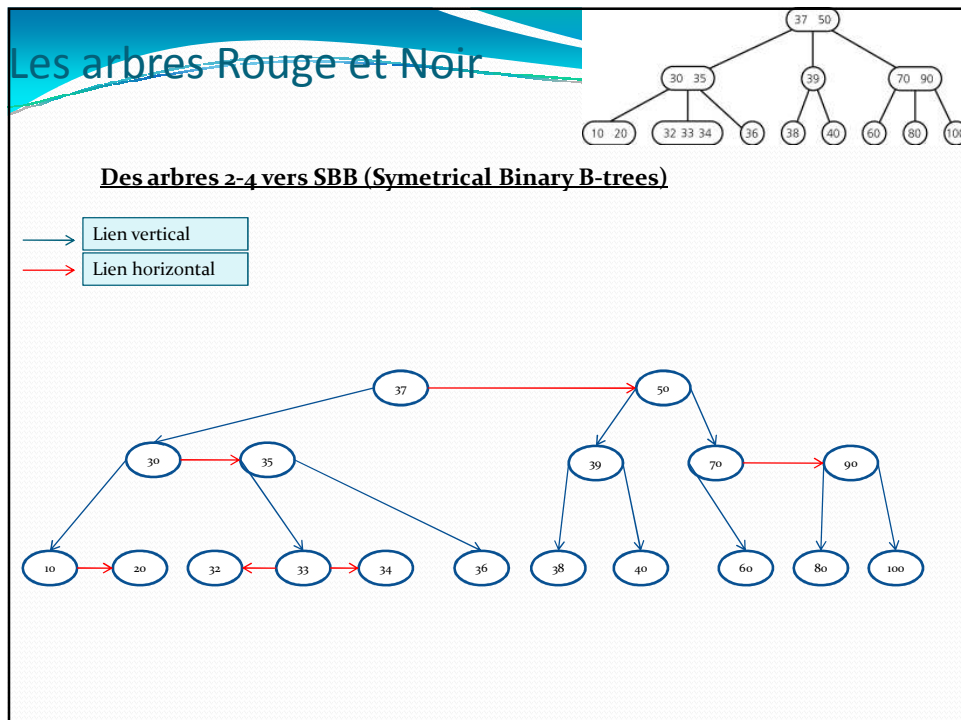
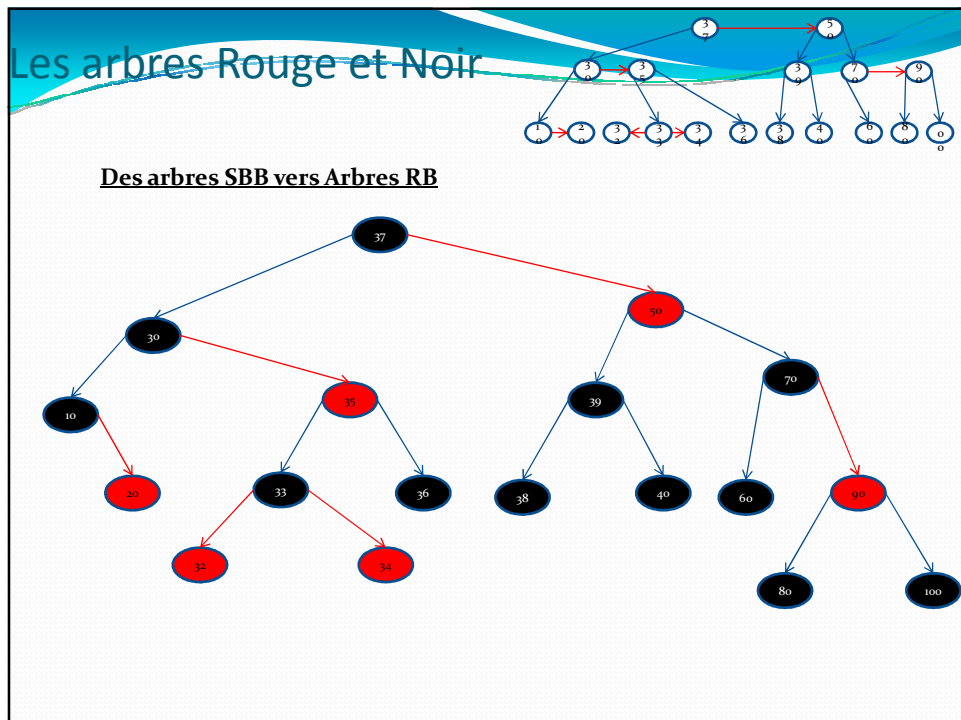
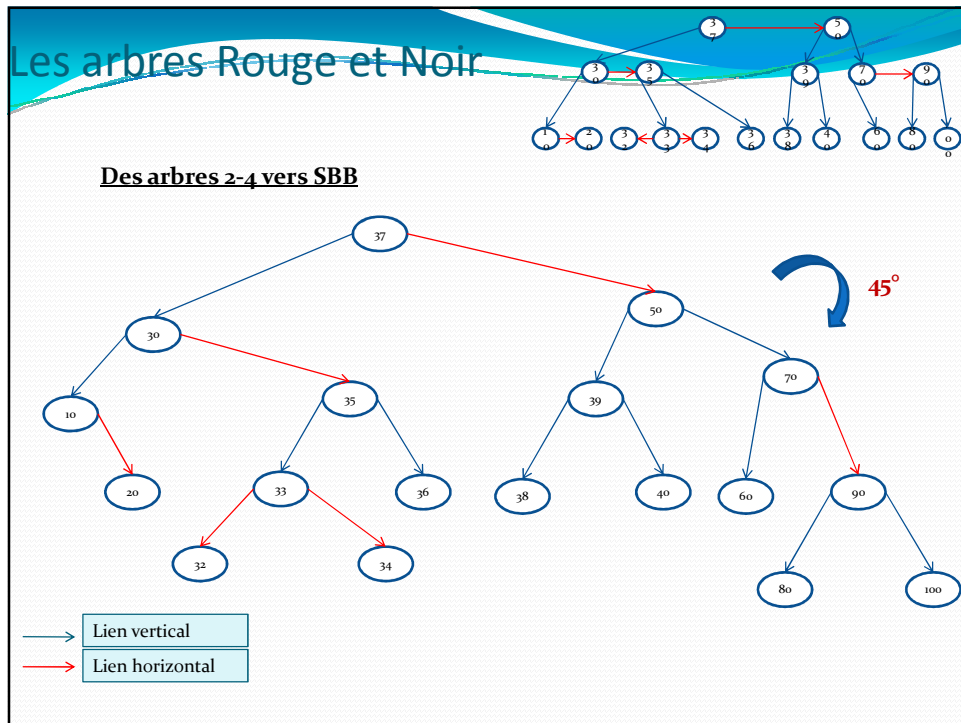


Structures de données avancées : *Arbres Red-Black*

Pr ZEGOUR DJAMEL EDDINE
Ecole Supérieure d'Informatique (ESI)
<http://zegour.esi.dz>
email: d_zegour@esi.dz





Les arbres Rouge et Noir

Arbres Rouge et Noir (Introduction)

RB : une structure de données très populaire

- Inclus dans plusieurs livres de structures de données
- Implémenté et intégrée dans plusieurs langages de programmations (JAVA, C...)
- Utilisé pour implémenter les dictionnaires et les tableaux associatifs
- Utilisé aussi dans diverses domaines (Voir Internet)

RB : arbre de recherche binaire équilibré

- Recherche, insertion et suppression : $O(\log_2(n))$
- Hauteur h d'un RB tree ayant n : $h \leq 2 \log_2(n+1)$ (pour AVL 1.44 $\log_2(n+1)$)

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Rouge et Noir (Introduction)

RB : Operations de maintenance :

- Restructuration et coloration.
- Insertion : au plus 1 restructuration et au plus $\log_2(N)$ colorations.
- suppression : au plus 2 restructurations et au plus $\log_2(N)$ colorations.

RB : nouvelle version de SBB (Symmetric Binary B-trees)

- SBB a été proposée par Bayer.
- SBB est simplement la representation en arbre de recherche binaire d'un arbre 2-4

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black

Un arbre rouge et noir (RB-tree) est un arbre binaire de recherche où chaque nœud est de couleur rouge ou noire .

De plus, toutes les branches issues de tout nœud :

1. Ne possèdent pas deux nœuds rouges consécutifs.
2. Possèdent le même nombre de nœuds noirs

La racine est noire

- Nœuds noirs : équilibrage parfait
- Nœuds rouges : tolérer légèrement le déséquilibre

Pire des cas:

Alternance entre les nœuds rouges et noirs.

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black (Insertion)

Insertion comme dans un arbre de recherche binaire.

Le nœud inséré est toujours une feuille

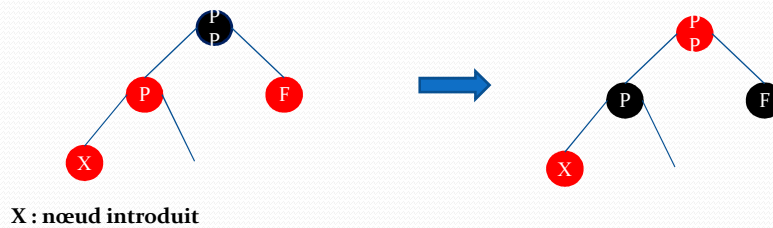
On lui attribue la couleur rouge

Si son père est aussi rouge, un algorithme de maintenance est appliqué

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black(Insertion)

CAS 1: le frère F de P est rouge



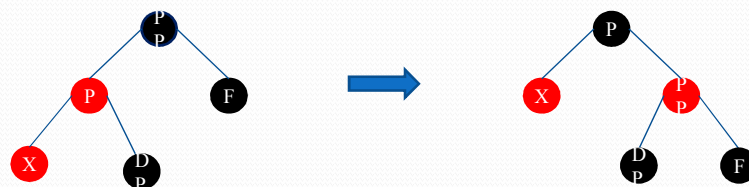
Les nœuds P et F deviennent noirs et leur père PP devient rouge.

Le processus continue en cascade

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black(Insertion)

CAS 2: le frère F de P est noir et X est le fils gauche de P.



Rotation droite du nœud PP.

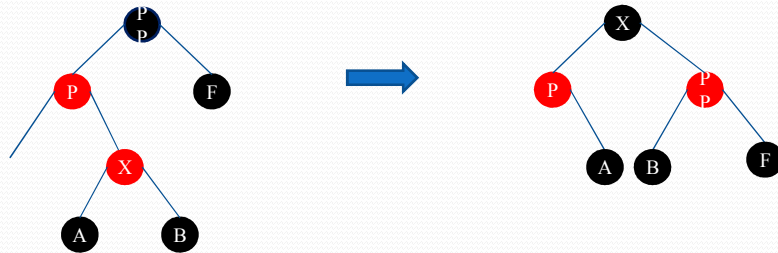
P devient noir et PP rouge.

Le processus se termine

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black(Insertion)

CAS 3: le frère F de P est noir et X est le fils droit de P.



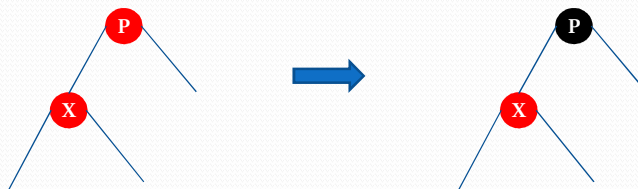
Rotation gauche du nœud P + rotation droite du nœud PP.
X devient noir et PP rouge.

Le processus se termine

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black(Insertion)

CAS 4: le nœud père P est la racine de l'arbre



Le nœud père devient noir

C'est le seul cas où la hauteur noire de l'arbre augmente.

Le processus se termine

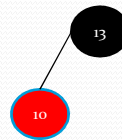
Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black (Exemple)

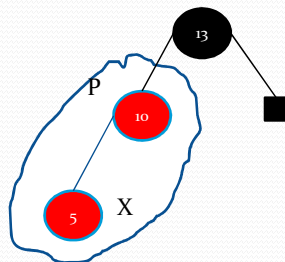
Insérer 13



Insérer 10

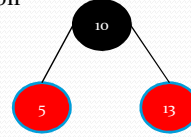


Insérer 5



Couleur du frère de P= noir
Et $X = fg(P)$

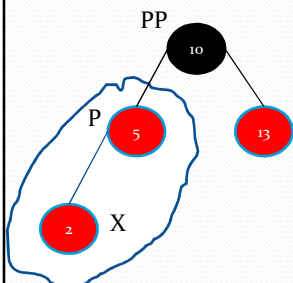
Rotation



Les arbres Rouge et Noir

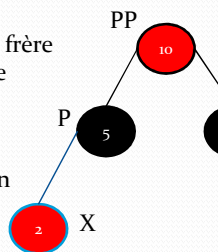
Arbres Red Black (Exemple)

Insérer 2

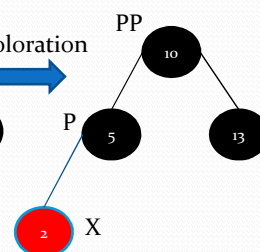


Couleur du frère de P= rouge

Coloration



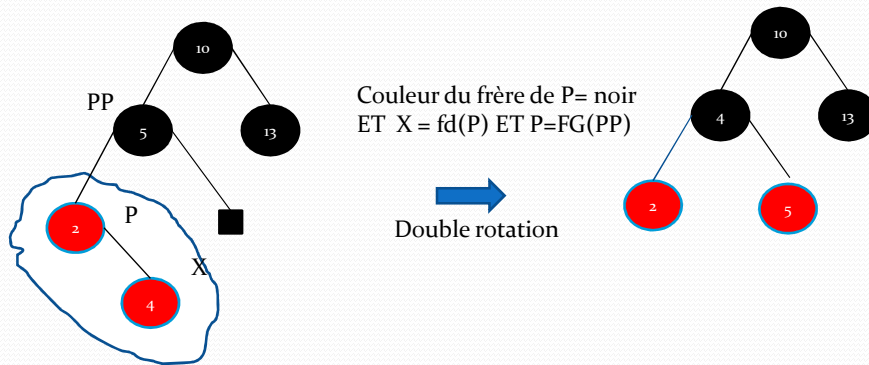
Coloration



Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black (Exemple)

Insérer 4



Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black (Suppression)

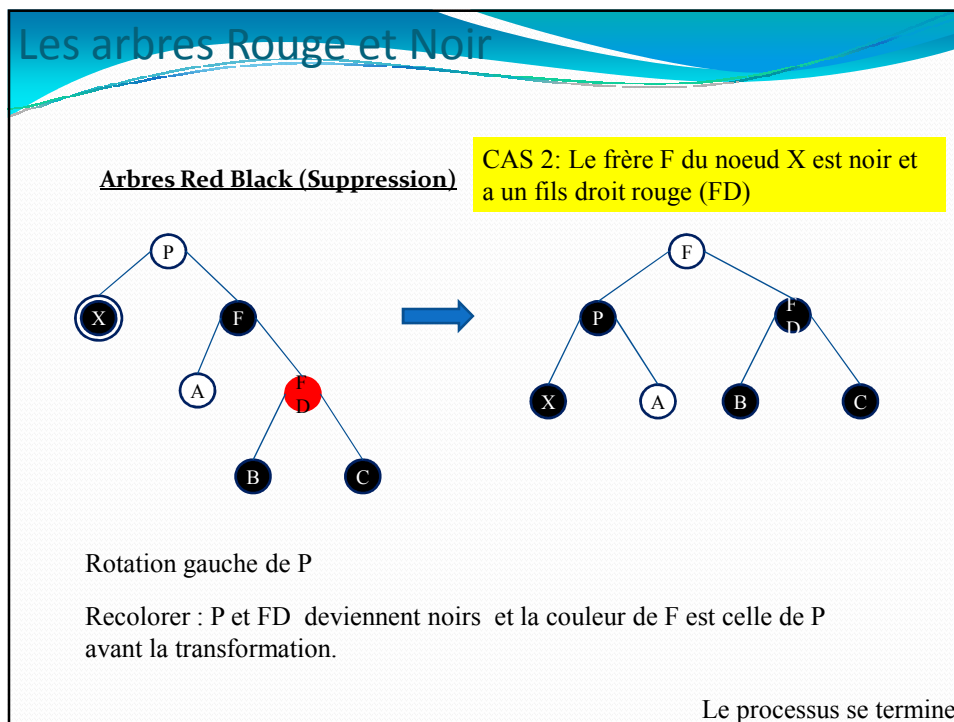
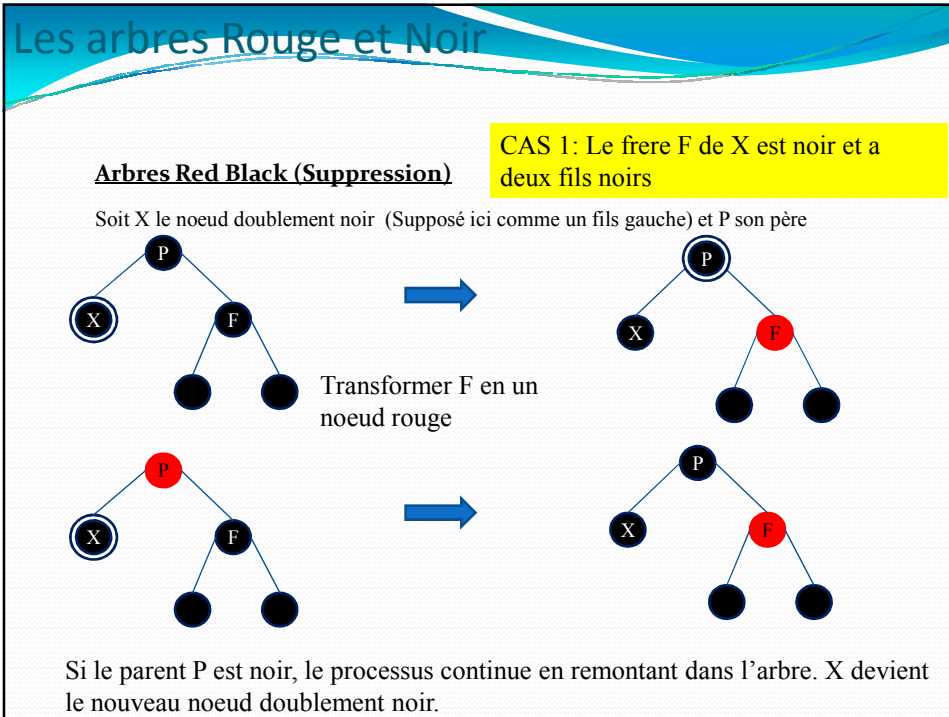
Suppression comme dans un arbre de recherche binaire.

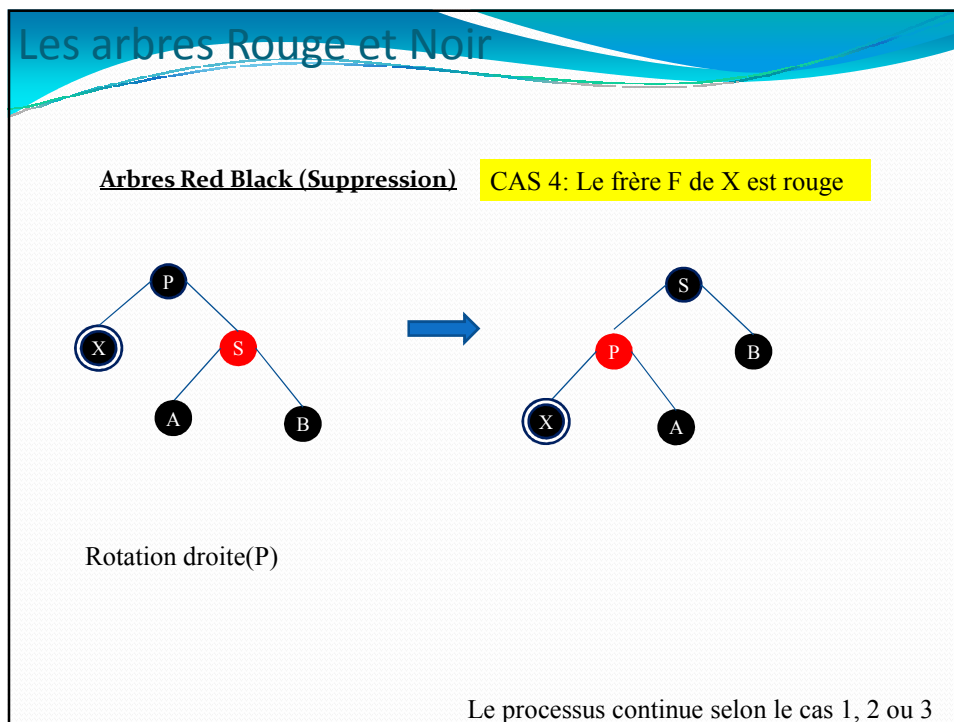
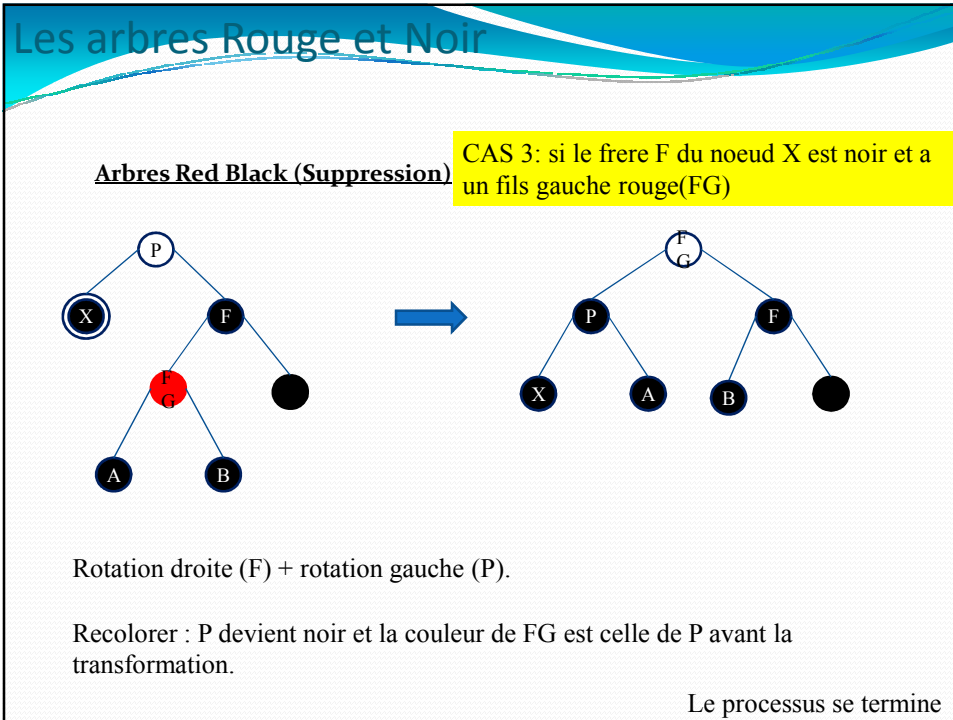
Si le nœud physiquement supprimé est noir, un algorithme de maintenance est appliqué.

On considère que le nœud qui remplace le nœud supprimé porte une couleur noire en plus.

Ceci signifie qu'il devient noir s'il est rouge et qu'il devient doublement noir s'il est déjà noir.

L'algorithme de maintenance a donc pour rôle de supprimer ce nœud doublement noir.






Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red Black (Suppression)

CAS 0: X est la racine de l'arbre

Soit X le noeud doublement noir



X devient simplement un noeud noir.

C'est le seul cas où la hauteur de l'arbre diminue. Le processus se termine.

Les arbres Rouge et Noir

Arbres Red-Black (Analyse théorique)

Operations de maintenance :

- Restructuration et coloration.
- Insertion : au plus 1 restructuration et au plus $\log_2(n)$ colorations.
- suppression : au plus 2 restructurations et au plus $\log_2(n)$ colorations.

N : nombre d'éléments insérés.

la profondeur maximale d'un arbre binaire équilibré est $2 * \log_2(n)$

Recherche, insertion et suppression : $O(\log_2(n))$