الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique**

Ecole préparatoire en sciences et techniques d'Oran.

**Module : Analyse 4**

2ème Année **Examen de synthèse** 2 H:30

**Exercice 1:** ($06pts$)

Soit $f(x) = (x-l)^2,\ l \in \mathbb{R}^*;$ une fonction $2l$ -périodique pour $x \in [0, 2l)$.

**1)** Trouver la série de Fourier de $f$.

**2)** Pour $l = \pi$, déduire

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}.$$

**Indication pour exercice 1:**

La série de Fourier associée à $f$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

**Exercice 2:** ($06pts$)

**I-** On considère une suite bornée $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombre réels.

**1)** Montrer que la série de terme général

$$\frac{a_n}{n(n+1)}$$

est converge.

**2)** Démontrer que

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1};$$

où $p, q$ deux entiers vérifient $0 < p < q$.

**3)** En déduire la somme de la série de terme général :

$$\frac{1}{n(n+1)};$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

**II-** on pose $a_n = x^n$.

**1-** Déterminer le domaine de convergence de la série entière de terme général

$$\frac{x^n}{n(n+1)}$$

**2-** comparer la somme de cette série à l'application :

$$x \to \frac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}.$$

**3-** calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

**Exercice 3:** $(08pts)$

L'objet de cette exercice est étudier l'existence de $J_m$.

Soient

$$J_m = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt;\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\, dt.$$

**1-**Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$est converge pour tout entier naturel non nul $m$.

**2-**Montrer que l'intégrale généralisée$I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\, dt$ est converge pour tout entier naturel non nul $k$.

**3-**Justifier l'existence de$J_1$et établir une relation entre$J_1$ et $F(0)$avec $F(0) = \frac{\pi}{2}$ $(Intégration\ par\ partie)$.

**4-**Exprimer, pour tout entier naturel non nul $m$ et pour tout nombre réel $x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$ l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\, dt$à l'aide des intégrales $I_k$.

**5-**En déduire l'existence de $J_{2p+1}$ pour tout entier naturel $p$.

**6-**quelle est la nature de l'intégrale généralisée $J_{2p}$.

Bonne chance