Ecole Préparatoire en Sciences et Technique d'Oran.

Unité de Physique 3 : Ondes et Vibrations

2011 / 2012 **07/02/2012**

Epreuve de Synthèse

Durée : 03h00

EXERCICE :1 (04 points)

Une corde, soumise à une tension ayant un module de 200N et fixée à ses deux extrémités, oscille au deuxième harmonique. Le déplacement de la corde est donné par

$$y(x,t) = 0{,}10 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin(12\pi t)$$

Les distances sont exprimées en mètre et les temps en secondes. Le point $x=0$ est une extrémité de la corde

a. Calculez la longueur de la corde, le module de la vitesse des ondes sur la corde et la masse de la corde.
b. Quelle est la période des oscillations dans le cas où la même corde vibre dans le troisième harmonique ?
c. Que devient la tension, si la corde vibre au troisième harmonique avec la même fréquence que celle de la question a) ?

EXERCICE : 2 (03 points)

Une source sonore A et une surface réfléchissante D se déplacent (dans l'air) directement l'une vers l'autre. La vitesse de propagation du son dans l'air est de $V=329\ m/s$, le module de la vitesse de A est $V_A=29{,}9 m/s$ et celle de D est $V_D=65{,}8 m/s$. La fréquence de l'onde émise par la source A est $f_A=1{,}20\ KHz$.

1. Déterminer la fréquence f_D et la longueur d'onde de l'onde détectée par D.
2. Déterminer (tel que mesurée par A) la fréquence f'_A et la longueur d'onde de l'onde réfléchie par D.

On rappelle la relation de l'effet Doppler : $f' = f\,\dfrac{1-\frac{V_{Detecteur}}{V}\cos(\theta_D)}{1-\frac{V_{source}}{V}\cos(\theta_S)}$

EXERCICE : 3 (05 points)

Une corde vibrante très longue a une masse linéique μ_1 pour $x < 0$ et μ_2 pour $x > 0$. Une onde incidente part de très loin à gauche et arrive vers le raccordement avec une valeur $u_i(x,t) = a_i\ cos(\omega t - k_i x)$

a) Écrire l'onde réfléchie $u_r(x,t)$ et l'onde transmise $u_t(x,t)$. On notera a_r et a_t leur amplitude respective.
b) Écrire les conditions de raccordement en $x = 0$ et en déduire les coefficients de réflexion et de transmission en fonction du rapport $\alpha = Z_1/Z_2$. ($Z_1=F/V_1$ et $Z_2=F/V_2$ représentent respectivement l'impédance de la partie gauche et celle de la partie droite de la corde. V_1 et V_2 étant les vitesses de propagation de l'onde sur la partie gauche et droite respectivement et F la tension à laquelle est soumise la corde)

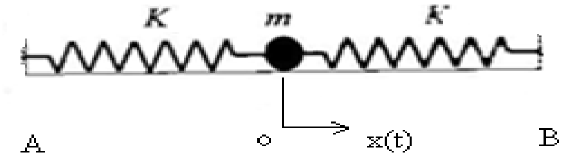
c) Montrer que la puissance moyenne de l'onde incidente en un point quelconque est :

$$\overline{P_i} = \frac{1}{2} Z_1 a_i^2 \omega^2$$

d) Trouver $\overline{P_r}$ et $\overline{P_t}$ et vérifier que $\overline{P_i} = |\overline{P_r}| + \overline{P_t}$. Qu'est ce qu'elle exprime cette équation ?

EXERCICE : 4 (08 points)

Une masse m est accrochée à deux ressorts de même raideur k, dont les autres extrémités sont fixées aux points A et B. Lorsque la masse est située en $x = 0$, les deux ressorts sont au repos. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse sans vitesse initiale depuis le point d'abscisse $x_0>0$. On suppose que la masse est en plus soumise à la force de frottement $\vec{f} = -\beta\vec{v}$ $(\beta > 0)$.
On donne : $m=2$ kg, $k=100$ N/m



1. Ecrire son Lagrangien et établir son équation du mouvement. On notera ω_0 la pulsation propre du mouvement libre.
2. Sachant que nous somme dans le cas d'un système amorti $(\alpha < \omega_0)$ et que la condition $\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0} = 1\%$ est satisfaite, calculer le coefficient de frottement $\alpha = \beta/2m$, le décrément logarithmique δ ainsi que le facteur qualité f_q du système. (ω étant la pulsation du mouvement amortie)
3. Résoudre l'équation du mouvement et trouver la position de la masse à chaque instant en tenant compte des conditions initiales.
4. A partir de maintenant on néglige le frottement et on considère que les extrémités A et B ont un mouvement oscillatoire harmonique décrit par :
$$x_A = a\cos(\Omega t) \quad et \quad x_B = a\cos(\Omega t + \phi)$$
Montrer, dans ce cas, que le mouvement de m est équivalent a un mouvement oscillatoire forcé dont on précisera la force d'excitation.
5. Déterminer alors l'amplitude A_m du mouvement de la masse m.
6. Tracez l'allure de la courbe représentant $A_m(\Omega)$. On prendra soin de bien expliquer ce qui se passe dans les intervalles $\Omega \leq \omega_0$ et $\Omega > \omega_0$. Que se passera-t-il si on ne néglige pas le frottement ?
7. A quelle condition peut-on annuler le mouvement de m sans arrêter celui des extrémités.
8. Dans le cas particulier où $\phi = 0$, en plus du mouvement des extrémités, on applique à la masse m une force d'excitation $F_e(t) = 2akcos(2\Omega t)$. Trouver la position de la masse à chaque instant dans ce cas.

Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran

Février 2012

Epreuve de synthèse (Physique)

Ex.1 (4 points)

D'après la fonction d'onde stationnaire on a :

a) $K = {}^{\pi}/_{2}$ $\quad$ $w=12\pi$

Si la corde oscille au 2ème harmonique le troisième nœud est la deuxième extrémité de la corde ce nœud se trouve en $x=4m$

$\rightarrow L = 4m$

La vitesse est :$v = \frac{\omega}{k}=24m/s$

La masse est: $m=\rho.L = {}^{f}/_{v^2}.L \rightarrow m = 1.38kg$

b) $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}=\frac{2\pi}{T_n} \rightarrow T_n=\frac{2L}{nv}=\frac{2}{3}\frac{L}{v}$

$T_3=0.111s$

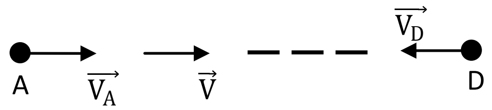
c) $f=6Hz \rightarrow 2\pi f=\frac{3\pi\acute{v}}{L} = \frac{3\pi\sqrt{\frac{F'}{\sigma}}}{l} \rightarrow (2\pi f)^2=\frac{9\pi^2\acute{F}}{L^2\rho}$

$$\rightarrow \acute{F}=\frac{(2\pi f)^2L^2}{9\pi^2}\rho \rightarrow \acute{F} = \left(\frac{2\pi fL}{3\pi}\right)^2\rho = \left(\frac{6\times4}{3\times\pi}\right)^2 \times \frac{1.38}{4}$$

$$= \left(\frac{2fL}{3}\right)^2 \times \frac{m}{L}=88.32\ v$$

Ex2 : (3 points)

1.



$$f_D = f_A \frac{1 + {V_D}/{V}}{1 - {V_A}/{V}} \qquad \Bigg| \qquad \theta_D = \pi, \quad \theta_s = 0$$

$f_D = 1583.9\ Hz$

Pour la longueur d'onde on a : $\lambda_D = \frac{V}{f_D} = \ 0.207\ m$

2. D devient une source et A un détecteur l'onde émise est f_D (onde réfléchie a même fréquence que l'onde incidente)

$$f'_A = f_D \ \frac{1 + {V_A}/{V}}{1 + {V_D}/{V}}$$

$f'_A = 2159.8\ Hz$ $\qquad \lambda'_A = \frac{v}{f'_A} = 0.152m$

Ex3 : (5 points)

a) L'onde réfléchie se propage vers les $x < 0$
   $\rightarrow\ U_r(x, t) = a_r \cos(\omega t + \ k_r x)$

Avec $k_r = k_i = \omega / v_1$

L'onde transmise se propage vers le $x > 0$ sur une corde de masse linéique μ_2

$U_t(x, t) = a_t \cos\,(\omega t - k_t x)$

$K_t = {w}/{v_2}$

b) Les conditions de raccordement sont :
   $U_i(0, t) + U_r(0, t) = U_t(0, t)$
   Et $\left.\frac{\partial U_i(0,t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial U_r}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U_t}{\partial x}\right|_{x=0}$

Ceci donne :

$a_i + a_r = a_t$

$\frac{a_i}{v_1} + \frac{a_r}{v_1} = \frac{a_t}{v_2}$

$\rightarrow \; a_i\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = a_r\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) \rightarrow \; a_r = a_i \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$

et $\; a_t = a_i \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$

Comme $v_1 = F/z_1$ et $v_2 = F/z_2$, on aura :

$$R = \frac{a_r}{a_i} = \frac{F/z_2 - F/z_1}{F/z_2 + F/z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} = R$$

Et $\; T = \frac{a_t}{a_i} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha}$

c) Par définition : $\; P(x, t) = -F \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t}$

Pour l'onde incidente : $P_i\,(x, t) = -F \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial U_i}{\partial t}$

$\rightarrow P_i(x, t) = \; -F\,(-k_i)\, a_i^2 \omega \sin^2(\omega t - k_i x)$

$= F/v_1 \; a_i^2 w^2 \; \sin^2(\omega t - k_i x)$

$P_i\,(x, t) = z_1 a_i^2 w^2 \; \sin^2(\omega t - k_i x)$

La valeur moyenne de Pi sur une période est:

$$\overline{P}_i = < P_i\,(x, t) > = \frac{1}{T}\int_0^T Pi\,(\,x, t)dt = z_1 a_i^2\, w^2 \; \underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \emptyset)\right)}_{1/2}$$

$$\overline{P}_i = \frac{1}{2} z_1 a_i^2 \omega^2$$

d) De la même façon on trouve :

$\overline{P}_r = -\frac{1}{2}\, z_1 a_r^2 \omega^2$ et $\; \overline{P}_t = \frac{1}{2}\, z_2 a_t^2 \omega^2$

et On a lien :

$|\overline{P}_r| + \overline{P}_t = \frac{1}{2}\, z_1 a_r^2 \omega^2 + \frac{1}{2}\, z_2 a_t^2 \omega^2$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \left[\, z_1 a_i^2 \frac{(\alpha - 1)^2}{(1 + \alpha)^2} + z_2\, a_i^2 \frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \right]$$

$=\frac{1}{2}\omega^2 a_i^2\left[\frac{z_1(\alpha-1)^2+z_2 4\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\right]$

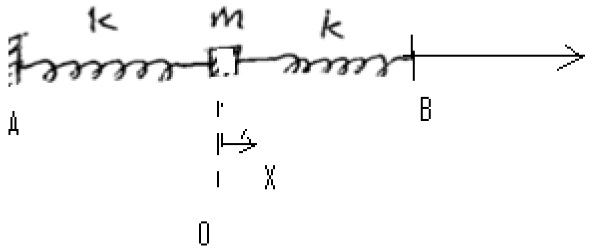
$=\frac{1}{2}\omega^2 a_i^2 z_1 \left[\cancelto{1}{\frac{(\alpha-1)^2+4\alpha}{(1+2)^2}}\right]$

$|\overline{P}_r|+\overline{P}_t=\frac{1}{2}z_1 a_i^2\omega^2=\overline{P}_i$

Cette relation exprime la conservation de l'énergie.

Energie incidente =énergie réfléchie +énergie transmise.

<u>EX4:</u> (8 points)



1/ $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k\,x^2-\frac{1}{2}k\,x^2$

$=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-k\,x^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial l}{\partial x}=Q_f=-B\,\dot{x}$

$\rightarrow m\ddot{x}+2kx=-\beta\dot{x} \rightarrow \ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2\,x=0$

Avec $\omega_0^2=\frac{2k}{m}=100 \rightarrow \omega_0=10\text{rd/s}$

2/ Mouvement amortie : on a la pulsation $\omega^2=\omega_0^2-\alpha^2$ et on sait aussi que :

$\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}=0.01 \rightarrow \omega=0.99\,\omega_0=9.9\text{ rd/s}$

$\rightarrow \alpha^2=\omega_0^2-\omega^2=1.99 \rightarrow \alpha=1.410\text{ s}^{-1}$

$F_q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=3.54$ et $\delta=\alpha T=\alpha\frac{2\pi}{\omega}=0.894$

3/ solution de la forme :

$x(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\emptyset)$

à $t=0$ $x(0)=x_0$ et $\dot{x}(0)=0$

$\rightarrow$ A $\cos \emptyset = x_0$ et $tg\emptyset = -\alpha/\omega \rightarrow \emptyset =$ -0,141 rad et A=1,01 x_0

$\rightarrow x(t)=1{,}01\ x_0\ e^{-1.41t}\ \cos(9.9t - 0.141)$

4/ dans ce cas le Lagrangien devient :

$L= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,(x-x_A)^2 - \frac{1}{2}k(x-x_B)^2$ et l'équation du mouvement s'écrit :

$m\ddot{x} + k(x-x_A) + k(x-x_B)=0$

$\rightarrow \ddot{x}+\omega_0^2\, x= \frac{k}{m}(x_A+x_B)$

$=\frac{ka}{m}\,[\cos(\Omega t) + \cos(\Omega t + \emptyset)]$

$=\frac{ka}{m}\left[2\cos\left(\frac{\emptyset}{2}\right)\cos(\Omega t + \frac{\emptyset}{2})\right]$

$= a\omega_0^2 \cos\left(\frac{\emptyset}{2}\right)\cos(\Omega t + \frac{\emptyset}{2})$

$\ddot{x}+\omega_0^2 x= F_m/m\ \cos(\Omega t + \frac{\emptyset}{2})$

C'est l'équation d'une masse soumise à la force d'excitation

$F(t)=F_m \cos\ (\Omega t + \frac{\emptyset}{2})$ avec $F_m=2\ a\ k \cos\frac{\emptyset}{2}$

5/ on cherche des solutions de la même force :

$x(t)=A\cos(\Omega t + \frac{\emptyset}{2})$

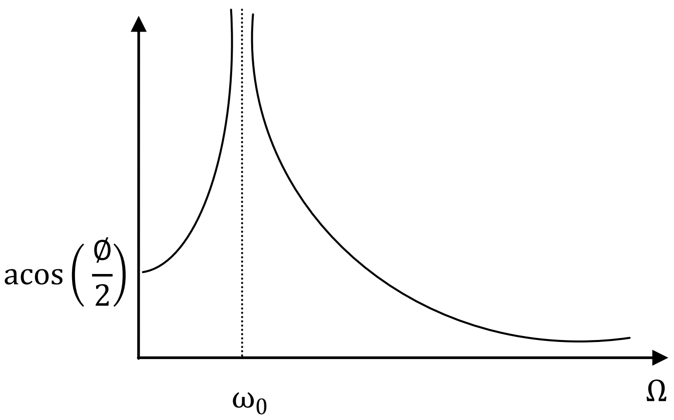
En injectant on trouve :

$A\,(\omega_0^2 - \Omega^2)=a\omega_0^2\cos\frac{\emptyset}{2}$

$A\,(\Omega)=\frac{a\ \omega_0^2\cos\left(\frac{\emptyset}{2}\right)}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

6/

$$\begin{cases} \text{Pour } \Omega = 0 \quad \text{on a } A(0) = a\cos\left(\frac{\emptyset}{2}\right) \\ \text{Pour } \Omega = \omega_0 \quad \text{il y a résonance } A(\omega_0) \rightarrow \infty \\ \text{Pour } \Omega \rightarrow +\infty \quad A(\Omega) \rightarrow 0 \end{cases}$$



7/ il suffit de prendre $\emptyset = \pi$ et on aura

$A(\Omega)=0 \qquad \forall\Omega \neq \omega_0$

8/ L'équation avec F_e toute seule est :

$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{2ak}{m}\cos(2\Omega t)$

$=a\,\omega_0^2\cos(2\Omega t)$

Admet comme solution $x_e(t)=A_e(\Omega)\cos(2\Omega t)$

Avec $A_e(\Omega)=\frac{a\omega_0^2}{(\omega_0^2-4\Omega^2)}$

L'équation étant linéaire la solution en présence de deux forces est égale à la somme des solutions

$x(t)=\frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2-r^2}\cos(rt)+\frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2-4r^2}\cos(2rt)$