2 ème AnnéeEcole Préparatoire en Sciences et Techniquesd'Oran

Module : Analyse Durée : 3h

06\02\2012

EXAMENN° 01

Exercice 01(03PTS)

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses avec la justification

1) Si $u_n > 0,$ et si la série $\sum_n u_n$converge, alors (u_n)est décroissante à partir d'un certain rang.
2) Soit$f$une fonction définie sur$\mathbb{R}^+$, positive et décroissante, telle que $\lim_{t\to+\infty} f\,(t) = 0.$

Soit $u_n = f\,(n)$pour tout n $\in\mathbb{N}$, alors

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{+\infty} u_n$$

3) Si une suite de fonctions$f_n(x)$ intégrable, convergeant uniformément vers $f$sur $[a;\ b]$alors f est intégrable sur $[a;\ b]$et

$$\int_a^b f_n\,(x)\,dx \to \int_a^b f\,(x)dx \text{ quand} n \to +\infty.$$

Exercice 02(05PTS)

1- Pour chacune des séries numériques suivantes dire si elle est absolument convergente,convergente ou divergente:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2\,n + (-1)^n}; \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n\log(n+1)}; \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)\,!}{(n\,!)^2}.$$

2- • Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{converge.}$$

•Démontrer que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{avec}\ o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \to 0 \text{ quand} n \to \infty.$$

•Etudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

TOURNER LA PAGE

Exercice 03(03PTS)

Calculer les sommes des séries suivantes après avoir vérifié leur convergence.

$$\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right);\ \sum_{n\geq 1}\frac{-a}{n\,(n+1)};\quad a\in\mathbb{R}$$

Exercice 04(05PTS)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout réel $x\ \geq\ 0$, on pose

$$f_n(x)=\frac{1}{1+xn^2}$$

1- Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On posera

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} f_n(x),\quad \forall x>0$$

2- Soit un réel $a\ >\ 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

3- Montrer que f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

4- Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

5- Soit un réel $\propto\,\in\,]1/2,1[$ et soit $g_n(x)\ =\ x^{\propto}f_n(x)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_n g_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

6- En déduire que

$$f(x)\ =\ o(x^{-\propto}),\text{ quand } x\ \to\ 0^{+}.$$

Exercice 05(04PTS)

Déterminer les domaines de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_n \frac{C_{2n}^n}{n^n}x^n, x\in\mathbb{R};\ \sum_n \sqrt{n}\,z^{\,n}\ , z\in\mathbb{C};\ \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!\,(n\ +\ a)!}\ , x\in\mathbb{R}\,.$$

BONNE CHANCE

Ecole préparatoire science et techniques Oran

Corrigé d'Analyse

Exercice n°01 :

1) V avec un exemple
2) F avec un centre exemple
3) V avec la démonstration ou bien un exemple

Exercice n°02 :

1) $\sum \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$ converge serie alternée avec

$A_n = \frac{1}{2n+(-1)^n}$ positive et décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

2) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log\ (n+1)} = \frac{1}{n\log(n+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \frac{1}{n\log(n+1)\sqrt{n+1}} \cong \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

Positive

Donc $\sum_n \frac{\sqrt{N+1}-\sqrt{N}}{N\ \mathrm{Log}\ (n+1)}$ converge

3) D'après d'Alembert $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2\frac{2n+1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 4$ Diverge

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ Converge car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ décroissante

On a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$ on fait D.L d'ordre 2 de $\frac{1}{1+x}$ avec $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} 0$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ n'est pas définie pour $n \geq 1$

Si on a $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge car $\sum {}^1/_n$ diverge

Exercice n°03 :

1) $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

$= \sum_{n \geq 2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right]$

Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right]$

$= (1- \frac{1}{\sqrt{2}})-(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}})$

donc $\sum_{n\geq 2}(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to +\infty} S_n = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-a}{n(n+1)} = -a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$

$= -a \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$= -a\,(1 - \frac{1}{n+1})$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{-a}{n(n+1)} = \lim S_n = -a \quad / a \in R$

Exercice n°05 :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{c_{2n}^{n}}{n^n}$

On a $c_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Et $c_{2n+2}^{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(2n+2-(n+1))!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}$

Donc $\lim_{n\to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to +\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2 / (n+1)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{[n!]^2 / n^n}}$

$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n+1} \times \frac{4n+2}{n+1} \times (1 + \frac{1}{n})\right] \cong \frac{4}{ne}$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \to R = +\infty$ donc

$D =]-\infty, +\infty[= R$

2) $\sum_{n\geq 2} \sqrt{n}\, Z^n$

On a $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \quad \to R = 1$

Donc le domaine de convergence $D = \{Z \in Q / |Z| < 1\}$

Pour $|Z| = 1 \to \sum_{n\geq 0} \sqrt{n}$ diverge $\to$D:disque ouvert de centre 0 et de rayon $R=1$

3) On a $\left|\frac{(-1)^n \times 2n}{4^n n!(n+a)!}\right| \leq \frac{|x^2|^n}{n!}$

Avec $e^{x^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{|x^2|^n}{n!}$ converge $\forall\, x \in R$ donc le rayon de convergence $R = +\infty$

Le domaine de convergence $=]-\infty, +\infty[$

Exercice n°04 :

Pour x>0 on a

1) $0<f_n(x)<\frac{1}{x}\frac{1}{n^2}$

Et puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente alors d'après le théorème de comparaison on a $\sum_n f_n(x)$ est convergente

2) Pour $x\in [a,+\infty[$, on a
$|f_n(x)|<\frac{1}{a}\frac{1}{n^2}$

3) Puisque la série $\sum\frac{1}{n^2}$ convergente $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$

4) Puisque on a $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ Donc on a la convergence uniforme → f est contenue en tant point d'intervalle $]0,+\infty[$
La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'_n(x)=\frac{-n^2}{(1+xn^2)^2} \quad \forall x\geq 0$$

Pour a>0 on a :

$$\left|f'_n(x)\right|\leq \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^2} \quad \forall x\geq a$$

Donc $\sum_n f'_n(x)$ converge normalement sur $[a,+\infty[$
Donc d'après le théorème de converge uniforme, on a f est dérivable en tant point de l'intervalle $]0,+\infty[$

5) On a g_n est une fonction positive continue sur $[0,+\infty[$, démavable $[0,+\infty[$

$$g'_n(x)=\frac{x^{\alpha-1}(\alpha+(\alpha-1)n^2x)}{(1+xn^2)^2} \qquad \forall\, x>0$$

$$\underset{x\geq 0}{\operatorname{Sup}}|g_n(x)|=g_n(\frac{\alpha}{1-\alpha}\quad\frac{1}{n^2})=\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Puisque $2\alpha>1 \rightarrow \sum\frac{1}{n^{2\alpha}}$ convergente et puisque on a $\|g_n(x)\|_\infty \cong$ série converge
$\rightarrow \sum g_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$

6) Posons $g(x)\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \quad x\geq 0$

D'après 5) on a $x^\alpha f(x)=g(x) \quad x>0$
Donc $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = 0$

$f(x)=0\,(x^{-\alpha}) \qquad x\rightarrow 0^+$