Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques D'Oran
2eme année
Examen Final, Analyse Numérique 01
12/02/2011 (*La durée* : 02^h : 30)

Documents ; Téléphone ; non autorisés
N.B : a chaque utilisation d'un théorème ou d'autre résultat du cours, rappeler soigneusement (et vérifier) les hypothèses sous lesquelles il peut s'appliquer, faute de quoi la conclusion n'a pas de valeur.

Exercice 1:(2pts)
À l'aide de la méthode de Newton, montrer comment trouver un algorithme pour le calcul de $\sqrt[3]{N}$.
N.B.: Le calcul doit être indiqué clairement et en détail.

Exercice 2:(7pts) (Résolution des équations non linéaire)
On veut résoudre dand $\mathbb{R}^+$ l'équation

$$x = g(x) \tag{1}$$

oû $g(x) = -\ln(x)$.
1. Montrer que (1) admet une seule racine $\overline{x}$, montrer que $\overline{x} \in I = [0, 1]$.
2. Montrer que les itérations: $x_{n+1} = g(x_n)$ divergent.
3. Montrer que la méthode itérative: $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ converge, si g^{-1} existe.
(la notation g^{-1} désigne la réciproque de g et non $\dfrac{1}{g(x)}$).
Cette égalité $\left(g^{-1}\right)' = \dfrac{1}{(g' \circ g^{-1})}$ est-elle juste toujours?
4. En posant $e_n = x_n - \overline{x}$, montrer que e_{n+1} est de signe opposé à e_n, qu'en conclut-on?

Exercice 3:(7pts) (Système linéaire)
Soit le système linéaire de dimension 4: $Cx = d$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$$

1. La résolution de ce système peut être ramenée à celle d'un système linéaire de dimension 3, l'inconnue x_4 étant facile à déterminer, donner cette inconnue et le système de dimension 3 restant que l'on notera

$$Ax = b. \tag{2}$$

2. Pour quelles valeurs α le système (2) admet-il une solution unique.
3. Donner la décomposition LU de A oû L : une matrice triangulaire inférieur a diagonale $= 1$ et U une matrice triangulaire supérieur, puis resourdre en fonction de β le système 2 pour $\alpha = -1$.
4. Donner la matrice de la méthode itérative $T_{G.S}$ correspondant au système (2).

Exercice 4:(4pts) (Equations différentielles)
Utiliser la méthode d'Euler pour trouver les premières quatre valeurs de la solution $y = f(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 1$, en prenant le pas $h = 0,1$. Effectuer les calculs avec trois décimales exactes.

N.B : La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Kh. ZENNIR et S. BENAMMAR
BON COURAGE

Exercice 1.

1. Il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x^3 - N = 0$ à l'aide de la méthode de Newton, $\boxed{\textbf{0.5pt}}$
En remplaçant $f(x)$ et $f'(x)$ dans l'algorithme de Newton et en simplifiant, on trouve

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right).\boxed{\textbf{1.5pt}}$$

Exercice 2.
1. Soit $f(x) = x + \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}_*^+$. Nous appliquons le théorème de la valeurs intermédiaire à f sur $[a, 1]$ oû $0 < a \leq 1$.
L'existence:$\boxed{\textbf{1pt}}$
f est continue sur $[a, 1]\,, \forall a \in]0, 1]$ et
$f(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$, et comme
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty < 0$,
alors, $\exists a \in]0, 1]$ tel que $f(1)f(a) < 0$, et d'après le Th.V.I
$\exists \overline{x} \in [a, 1]$ d'ou $\overline{x} \in]0, 1]$ tel que $f(\overline{x}) = 0$, et donc $\overline{x} = g(\overline{x}) = -\ln(\overline{x})$.
L'unicité:$\boxed{\textbf{1pt}}$
$\forall x \in [a, 1] : f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$, alors f est strictement monotone sur $[a, 1]\,$, donc
la solution est unique.
2. Pour $g(x) = -\ln(x)$,
on a $x + \ln(x) = 0 \Rightarrow x = -\ln(x)$, alors $x = g(x)$.
$\forall x \in [a, 1[$: $g'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $|g'(x)| = \dfrac{1}{x} > 1$, donc les itérations divergent.$\boxed{\textbf{1pt}}$

3. D'après les questions (1) et (2), la fonction g est strictement monotone (Injection) et continue (Surjection) alors elle est bijective, donc g^{-1} existe.$\boxed{\textbf{1pt}}$
On a $x = g(x) \Rightarrow g^{-1}(x) = \exp(-x)$. g^{-1} est dérivable et on a $\left(g^{-1}\right)'(x) = -\exp(-x)$.
D'autre part, en générale $(u \circ v)' = (u' \circ v)\, v'$ par conséquent $(g \circ g^{-1})'(x) = \left(g' \circ g^{-1}\right)(x) \left(g^{-1}\right)'(x)$
Or, $g \circ g^{-1} = Id$, donc $\left(g \circ g^{-1}\right)' = 1$, on obtient $\left(g^{-1}\right)' = \dfrac{1}{(g' \circ g^{-1})}$.$\boxed{\textbf{1pt}}$
On a $\forall x \in [a, 1]\,, g^{-1}(x) \in [\exp(-1), \exp(-a)] \subset [0, 1]\,$, car $\exp(-x)$ décroissante et $a > 0$,
alors $\exp(-a) < \exp(-0)$ donc $\forall x \in]0, 1[, g^{-1}(x) \subset [0, 1]\,$.$\boxed{\textbf{0.5pt}}$
$\forall x \in]0, 1[$: $\left(g^{-1}(x)\right)' = -\exp(-x) \Rightarrow \left|\left(g^{-1}(x)\right)'\right| = \exp(-x) < 1$,
Alors la méthode itérative $x_{n+1} = g^{-1}(x)$ converge.$\boxed{\textbf{0.5pt}}$
4. Posons $e_n = x_n - \overline{x}$ et on a $g^{-1}(x) = \exp(-x)$. La méthode $x_{n+1} = \exp(-x)$ converge et grace au théorème des accroissements finis on sait que

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \overline{x} = g^{-1}(x_n) - g^{-1}(\overline{x}) = \left(g^{-1}\right)'(y_n)\,(x_n - \overline{x})\,, y_n \in [x_n, \overline{x}]$$

Ainsi $e_{n+1} = \left(g^{-1}\right)'(y_n) e_n$. Et comme $\left(g^{-1}\right)'(y_n) < 0$, $\forall y_n \in \mathbb{R}_+^*$. $\boxed{\textbf{0.5pt}}$
Donc e_{n+1} et e_n sont de signes opposés, par conséquent deux itérations successives donnent un encadrement de $\overline{x}$.$\boxed{\textbf{0.5pt}}$

Exercice 3.
1. On a

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=\beta \\ \alpha x_2+x_3+3x_4=5 \\ 3x_1+3x_2+6x_3+2x_4=2 \\ 2x_4=2 \end{cases}$$

alors $x_4=1.$ et $\boxed{\mathbf{1pt}}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{\mathbf{1pt}}$$

2. $Ax=b$ admet une solution unique si $\det A\neq 0$, alors pour $\alpha\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ le système admet une seule solution. $\boxed{\mathbf{1pt}}$
3. $A=LU$ avec

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{-3}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3-3\alpha}{\alpha} \end{pmatrix}. \boxed{\mathbf{1pt}}$$

et la solution est $(x,y,z)=\left(-1-\frac{3}{2}\beta, \frac{1}{2}\beta-1, \frac{1}{2}\beta+1\right)$ $\boxed{\mathbf{1pt}}$
4. $T_{G.S}$,

$$\begin{cases} x_1=\beta-2x_2-3x_3 \\ x_2=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}x_3-\frac{1}{\alpha}3x_4 \\ x_3=-\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Les itérations:

$$\begin{cases} x_1^{n+1}=\beta-2x_2^n-3x_3^n \\ x_2^{n+1}=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}x_3^n \\ x_3^{n+1}=-\frac{1}{2}x_1^{n+1}-\frac{1}{2}x_2^{n+1} \end{cases} \quad \boxed{\mathbf{1pt}}$$

alors

$$\begin{cases} x_1^{n+1}=\beta-2x_2^n-3x_3^n \\ x_2^{n+1}=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}x_3^n \\ x_3^{n+1}=-\frac{1}{2}\left(\beta-2x_2^n-3x_3^n\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}x_3^n\right) \end{cases}$$

dinc

$$T_{G.S}=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & \frac{3\alpha+1}{2\alpha} \end{pmatrix}. \boxed{\mathbf{1pt}}$$

Exercice 4. Pour $h=0,1$ les valeurs successives de la variable indépendante seront $x_0=0, x_1=0.1$, $x_2=0.2, x_3=0.3, x_4=0.4$.
Calculons les valeurs respectives de la solution cherchée d'après la formule d'Euler $\boxed{\mathbf{1pt}}$

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i+hf(x_i,y_i) \\ &= y_i+h\left(\frac{y_i-x_i}{x_i+y_i}\right) \end{aligned}$$

avec $y_0=1$, et $i=0,1,2,3$.
Pour $i=0$: $\boxed{\mathbf{0.75pt}}$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0+hf(x_0,y_0) \\ &= y_0+h\left(\frac{y_0-x_0}{x_0+y_0}\right) \\ &= 1+0.1\left(\frac{1-0}{0+1}\right) \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

Pour $i = 1$:**[0.75pt]**

$$y_2 = y_1 + h\left(\frac{y_1 - x_1}{x_1 + y_1}\right) = 1.1 + 0.1\left(\frac{1.1 - 0.1}{0.1 + 1.1}\right) = 1.183$$

Pour $i = 2$:**[0.75pt]**

$$y_3 = y_2 + h\left(\frac{y_2 - x_2}{x_2 + y_2}\right) = 1.183 + 0.1\left(\frac{1.183 - 0.2}{0.2 + 1.183}\right) = 1.254$$

Pour $i = 3$:**[0.75pt]**

$$y_4 = y_3 + h\left(\frac{y_3 - x_3}{x_3 + y_3}\right) = 1.254 + 0.1\left(\frac{1.254 - 0.3}{0.3 + 1.254}\right) = 1.315$$

Kh. ZENNIR et S. BENAMMAR