

ECOLE PRÉPARATOIRE EN SCIENCES ET TECHNIQUES D'ORAN
2EME ANNÉE
DEVOIR SURVEILLÉ, ANALYSE NUMÉRIQUE 02

28/04/2012 (La durée : 02^h : 00)

Documents ; Téléphone ; non autorisés

N.B : a chaque utilisation d'un théorème ou d'autre résultat du cours, rappeler soigneusement (et vérifier) les hypothèses sous lesquelles il peut s'appliquer, faute de quoi la conclusion n'a pas de valeur.

Exercice 1:(7pts) (Interpolation polynomiale)

Le but de cet exercice est de trouver le polynôme interpolant les quatre points:

$$(x_0 = 1, y_0 = 10), (x_1 = 2, y_1 = 26), (x_2 = 3, y_2 = 58), (x_3 = 4, y_3 = 112). \quad (1)$$

Ce polynôme s'écrit:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (2)$$

Il s'agit de trouver $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)^t$.

1. Donnez la formulation matricielle du problème d'interpolation ($P(x_i) = y_i, i = 0, \dots, 3$) sous la forme

$$Va = y, \quad (3)$$

où V est la matrice de Vandermonde du problème d'interpolation.

2. On considère maintenant la formulation suivante du polynôme:

$$Q(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Calculez les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3 pour que le polynôme $Q(x)$ (encore appelé polynôme de Newton) soit interpolant: $Q(x_i) = y_i, i = 0, \dots, 3$.

3. On considère la suite de polynômes:

$$\begin{cases} R_4(x) = c_3 \\ R_k(x) = c_{k-1} + (x - x_{k-1})R_{k+1}(x), k = 3, \dots, 1 \end{cases} \quad (4)$$

a) Si l'on représente les polynômes $R_k(x)$ à l'aide de coefficients b_{ki} tels que:

$$R_k(x) = b_{k,0} + b_{k,1}x + b_{k,2}x^2 + \dots + b_{k,4-k}x^{4-k} = \sum_{i=0}^{4-k} b_{k,i}x^i \quad (5)$$

Calculez les polynômes R_4, R_3, R_2 et R_1 (et les coefficients $b_{k,i}$) avec les données du problème d'interpolation.

b) Montrez que $R_1(x) = Q(x)$, puisque $Q(x) = P(x)$, résoudre l'équation (3) par une méthode directe.

Exercice 2:(3pts) (Interpolation polynomiale)

Le tableau suivant présente la conductivité thermique de la vapeur d'acétone en fonction de la température:

$T(^{\circ}F)$	32	115	212	363
$k(Btu/hr ft ^{\circ}F)$	0.0057	0.0074	0.0099	0.0147

(6)

(a) Estimer la conductivité thermique de l'acétone à $300^{\circ}F$ en utilisant le polynôme de Lagrange de degré 2 passant par les 3 derniers points du tableau.

(b) Estimer la température en $^{\circ}F$ qui correspond à la conductivité thermique $k = 0.008 Btu/hr ft ^{\circ}F$ en utilisant un polynôme de Lagrange de degré 2 passant par les 3 derniers points du tableau.

Exercice 3:(4pts) (Intégrations numériques)

On pose $a = 0$, $b = 1$ et

$$f(x) = x^5 - 3x^2 + x - 1$$

a) Estimer l'erreur commise en calculant

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

par la formule de Simpson composée avec $h = \frac{1}{4}$.

b) Combien de nœuds d'intégration faudrait-il utiliser pour réduire l'erreur commise en (a) d'un facteur au moins 10?

Exercice 4:(6pts) (Intégrations numériques)

Calculer, si l'on pose $h = 0.5$, l'intégrale:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{2+x} dx$$

1. Selon la formule des trapèzes.
2. Selon la formule de Gauss.
3. Estimer les résultats obtenus
(Effectuer les calculs avec 5 décimales exactes).

N.B : La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Kh. ZENNIR et S. BENAMMAR
BON COURAGE