Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran

$2^{ème}$ année **2011/ 2012** **Durée : 1h 45mn**

Devoir surveillé n°1 de probabilité

Execice1 : (Sur 6 points). On lance successivement trois pièces de monnaie et les variables aléatoires X et Y désignent respectivement les nombres de Faces apparues sur les deux premières pièces et le nombre de Piles sur les deux dernières.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales de X et Y. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?
2. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice2 : (Sur 6 points). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par :

X \ Y	-1	1
-1	Pq	q^2
1	Pq	p^2

1. Trouver une relation entre p et q (Les valeurs p et q sont dans]0, 1[).
2. Calculer les espérances mathématiques de X et Y, ainsi que leurs variances (en fonction de p et q).
3. Trouver p et q tels que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes.
4. Donner le tableau de probabilités conditionnelles de X relativement à Y.

Exercice3 : (Sur 8 points). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{xy}} & , \; si\; 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & , \quad ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de la constante k. Donner les densités marginales des variables aléatoires X et Y.
2. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
3. Trouver la fonction de répartition conjointe du couple (X, Y).
4. Donner la densité conditionnelle de Y sachant que X=$\frac{1}{2}$.

BA) Corrigé devoir surveille n°=01 (02^{eme}année) 2011/2012 :

Exercice01: (sur 06 pts)

01) Loi du couple (x,y):

x \ y	0	1	2
0	0	1/8	1/8
1	1/8	2/8	1/8
2	1/8	1/8	0

Loi marginale de x :

x	0	1	2
P_x	1/4	1/2	1/4

Loi marginale de y :

y	0	1	2
P_y	1/4	1/2	1/4

P(x=0, y =0)=0 $\neq$P(x=0)P(y=0)= $\frac{1}{16}$ donc les variables aléatoires x et y ne sont pas indépendantes.

01) $E(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = E(y)$

$E(xy) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$Cov(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)= \frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$

Exercice02 : (sur 06 pts)

1) Il faut que : $pq+q^2+pq+p^2 =1$

càd : $2pq+p^2+q^2= (p+q)^2 =1$ => p+q=1 => p=1-q

2)

x	-1	1
p_x	q	p

$E(x) = -q+p$

y	-1	1
P_y	$2pq$	P^2+q^2

$E(y) = -2pq+p^2+q^2 = (p-q)^2$

$E(x^2)=q+p=1$

$E(y^2) = 2pq+p^2+q^2 = (p+q)^2 = 1$

$V(x)=E(x^2)-E^2(x)=1-(-q+p)^2$

$V(y)=E(y^2)-E^2(y)=1-(p-q)^4$

3) Si les variables x et y sont indépendantes alors

$P(x=-1, y=-1)=P(x=-1)\,P(y=-1)$

D'où $(2pq)\,q=pq$ cad: $2q=1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Et comme $p=1-q$ alors $p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

4) $p=q=\frac{1}{2}$ alors:

x \ Y	-1	1	Marg x
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Marg y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Le tableau de probabilités conditionnelles de x relativent à y :

Y / X	-1	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P_{Y=y_i}(x=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{p(Y=y_j)}$

Exercice 03 : (sur 08pts)

1) f est densité conjointe donc f≥0 et $\iint f(x,y)dxdy$ =1

   D'où k ≥0 et $\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\sqrt{xy}} dxdy$ =1 (*)

(*) => $k\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{xy}} dxdy$= $k\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y}})\, dx$= $k\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} 2\sqrt{y} \int_x^1 dx$

=$2k\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})dx$ = $2k\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)dx$= $2k$=1=> k=1/2

D'où : $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{xy}} & \text{si} \quad 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Densité marginale de x :

$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_x^1 \frac{dy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{y}\int_x^1 dx$

= $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (1- $\sqrt{x}$)= $\frac{1}{\sqrt{x}}$ -1, pour 0 < x <1

Fonction densité marginale de y

$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{xy}}dx = 1$ pour $0 < y < 1$

$f(x,y) \neq f_x(x) f_y(y)$ Donc X et Y ne sont pas indépendantes

2) Fonction de répartition conjointe de (x,y)

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 \quad , \text{si } x\leq 0 \text{ ou } y\leq 0 \\ 2\sqrt{xy} - x, si\ 0 < x \leq y < 1 \\ 2\sqrt{x} - x, si\ 0 < x \leq 1\ et\ y \geq 1 \\ 1,\ si\ x \geq 1\ et\ y \geq 1 \end{cases}$$

4) Fonction densité conditionnelle de y sachant x=$\frac{1}{2}$

$$f_{y/x=\frac{1}{2}}(y) = \frac{f(\frac{1}{2},y)}{f_x(\frac{1}{2})} = \frac{F(\frac{1}{2},y)}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}\frac{1}{\sqrt{y}} \quad si\ 0 < \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0 \qquad \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2-\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{y}} \quad si\ \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ 0 \qquad \text{ailleurs} \end{cases}$$