**Devoir surveillé**

## Module : Algèbre 3. Durée 02h00

**Exercice** 1 *(06 pts)*.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres associés de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que $A$ est diagonalisable et écrire la formule de changement de base $A = PDP^{-1}$.

**Exercice** 2 *(10 pts)*.

[L'objectif de cet exercice est d'obtenir $A^{-1}$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Les valeurs propres ne doivent pas être calculées dans cet exercice]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. On désigne par $P_A(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ le polynôme caractéristique de $A$ et par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de $A$.

1. Calculer $A^2$ et $A^3$.
2. Exprimer $a, b, c$ en fonction des valeurs propres de $A$.
3. On désigne par $p_1, p_2, p_3$ les traces respectives de $A$, $A^2$ et $A^3$.
   (a) Calculer $p_1, p_2, p_3$.
   (b) Montrer que $a = -p_1$, $b = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)$ et $c = \frac{1}{3}(p_2 - bp_1 - p_3)$.
   Indication : Nous avons par identification $p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $p_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ et $p_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$.
   (c) Calculer $a$, $b$ et $c$.
4. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour calculer $A^{-1}$.

**Exercice** 3 *(04 pts)*.

Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $b$ une forme bilinéaire sur $E \times E$. Montrer que :

1. $\{0_E\}^\perp = E$.
2. Pour toutes parties non vides $H$, $G$ de $E$, on a
$$H \subset G \Rightarrow G^\perp \subset H^\perp.$$

Correction DS1 Algèbre 3

Année 2011/2012

## Exercices 1 :

1) $P_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$.

Les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = -1$ , $\lambda_3 = -2$

$E(1) = \{\propto (2,-1,0) \mid \propto \in R\}$, $E(-1) = \{\propto (1,1,2) \mid \propto \in R\}$

$E(-2) = \{\propto (1,0,1) \mid \propto \in R\}$

2) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

A Diagonalisable car toutes les valeurs propres sont distinctes

## Exercices 2 :

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 9 \\ 7 & -8 & -5 \\ 12 & 26 & -11 \end{pmatrix}$

2) $P_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ d'où en distribuant on obtient $a = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$,
$b = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$ $c = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

3) $(a)$ $P_1 = 1$, $P_2 = 15$ , $P_2 = -11$

(b) $a = -P_1$ b=........................effectuer les calculs

(c) $a=-1$ $b=-7$ $c=11$

4) d'aprés Cayley Hamilton, $P_1(A) = 0$ donc $A^3 - A^2 - 7A + 11I = 0$

On obtient $A^{-1} = \frac{1}{11}(-A^2 + A + 7I) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

## Exercices 03 : voir le cours.