Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran
1ière année EPSTO

Année 2011/2012
Durée 3h

Examen Final d'Analyse I

Exercice 1.(03pts) En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^1 x dx, \quad \int_1^2 x^2 dx \text{ et } \int_0^a e^x dx, \quad a > 0$$

Indication: On se donne $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\, n\,(2n-1)}{6}$.

Exercice 2.(03pts)

1. En utilisant la caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure, montrer que:

$$\inf A = 1 \text{ et } \inf B = -1 \text{ avec}$$

$$A = \left\{1 + \frac{1}{2n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \text{ et } B = \left\{-1 + \frac{1}{2n+1};\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

2. Trouver $\sup A, \sup B$.

3. En déduire $\sup C$ et $\inf C$ avec

$$C = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Exercice 3.(04pts) Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$\begin{cases} U_1 = 1,\ U_2 = 2 \\ U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + U_{n-2}\right),\ n \geq 3. \end{cases}$$

i) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq U_n \leq 2$.

ii) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2^{n-1}}$

iii) Montrer que $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

iv) Soient $A = \{U_{2n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{U_{2n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\inf A = \sup B$.

à suivre...

Exercice 4.(03pts) Soit f une fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x^3\left(2 - 3\ln\left(x^2\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

- Justifier l'application du théorème de Rolle à f sur $\left[0, e^{\frac{1}{3}}\right]$.
- Préciser la valeur $c \in \left]0, e^{\frac{1}{3}}\right[$ telle que $f'(c) = 0$.

Exercice 5.(04pts) Soit la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ xe^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

i) Etudier la dérivabilté de f en zéro.

ii) f admet-elle un développement de Taylor au voisinage de zéro?.

iii) Trouver le développement limité généralisé de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 2.

iv) Déduire les asymptotes obliques et leurs positions par rapport au graphe de f.

Exercice 6. (03pts)

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de zéro de $arc\sin x$.

2. Trouver le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de zéro pour la fonction:

$$f(x) = \frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. En déduire le développement limité à l'ordre 6 pour la fonction:

$$g(x) = (arc\sin x)^2.$$

Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran — Année 2011/2012
1ière année EPSTO — Durée 3h

Correction de l'Examen Final d'Analyse I

Exercice 1.(03pts)

On a:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) \text{.............}\textbf{sur 0,25pt}$$

1.

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\text{.......}\textbf{sur 0,75pt}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 dx &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1+\frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k+\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] = \frac{7}{3}\text{......}\textbf{sur 1,00pt}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^a e^x dx &= \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{a}{n}k} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{a}{n}}\right)^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{a}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{a}{n}}}\\ &= (e^a-1)\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^{\frac{a}{n}}-1}{\frac{a}{n}}} = (e^a-1)\text{.....}\textbf{sur 1,00pt}\end{aligned}$$

Exercice 2.(03pts)

1. $\inf A = 1$:

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^*;\ 1<1+\dfrac{1}{2n}\\ \forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*;\ \ 1+\dfrac{1}{2n_\varepsilon}<1+\varepsilon\end{cases}\text{....}\textbf{sur 0,25pt}$$

$$1+\frac{1}{2n_\varepsilon} < 1+\varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}\text{.. donc il suffit de prendre } n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1\text{..}\textbf{sur 0,25pt}$$

$\inf B = -1$:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; \quad -1 \leq -1 + \dfrac{1}{2n+1} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*; \quad -1 + \dfrac{1}{2n_\varepsilon + 1} < -1 + \varepsilon \end{cases} \text{....}\textbf{sur 0,25pt}$$

$$-1 + \frac{1}{2n_\varepsilon + 1} < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)..$$

$$\text{donc il suffit de prendre } n_\varepsilon = \left[\left|\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right|\right] + 1..\textbf{sur 0,25pt}$$

2. Ona: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{3}{2} \in A$ alors $\sup A = \dfrac{3}{2}$ .....**sur 0,25pt** de même $\forall n \in \mathbb{N}$; $-1 + \dfrac{1}{2n+1} \leq 0 \in B$ alors $\sup B = 0$....**sur 0,25pt**

3. Remarquons que $C = A \cup B$, en effet:

$$\begin{aligned} C &= \left\{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{1 + \frac{1}{2k};\ k \in \mathbb{N}^*(n = 2k)\right\} \cup \\ & \left\{1 + \frac{1}{2k+1};\ k \in \mathbb{N}(n = 2k+1)\right\} \text{...}\textbf{sur 0,5pt} \end{aligned}$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \sup C &= \max(\sup A, \sup B) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}\text{....}\textbf{sur 0,25pt+0.25pt} \\ \inf C &= \min(\inf A, \inf B) = \max(1, -1) = -1\text{....}\textbf{sur 0,25pt+0.25pt} \end{aligned}$$

Exercice 3.(04pts)

i) Par récurrence. Pour $n = 1$ et $n = 2$ la relation est vraie....**0,25pt**, supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre n c.à.d

$$1 \leq U_n \leq 2 \text{ et } 1 \leq U_{n-1} \leq 2 \text{ alors } 1 \leq U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + U_{n-1}) \leq 2\text{....}\textbf{sur 05pt}$$

ii) Par récurrence. Pour $n = 1$

$$|U_1 - U_2| = |2 - 1| = 1 = \frac{1}{2^0}\text{....}\textbf{sur 0,25pt}$$

Supposons qu'elle est vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$:

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| = \left|\frac{1}{2}(U_{n+1} + U_n) - U_{n+1}\right| = \frac{1}{2}|U_{n+1} - U_n| = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}\text{...}\textbf{sur 0,5pt}$$

iii) On a:

$$\begin{aligned} U_{2n+2}-U_{2n} &= \frac{1}{2}\left(U_{2n+1}+U_{2n}\right)-U_{2n}=\frac{1}{2}\left(U_{2n+1}-U_{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(U_{2n}+U_{2n-1}\right)-U_{2n}\right)=-\frac{1}{2^2}\left(U_{2n}-U_{2n-1}\right) \\ &= \ldots\ldots \\ &= \frac{(-1)^{2n-1}}{2^{2n}}\left(U_2-U_1\right)=\frac{-1}{2^{2n}}<0....\textbf{sur 0,5pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{2n+3}-U_{2n+1} &= \frac{1}{2}\left(U_{2n+2}-U_{2n+1}\right)=\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\left(U_{2n+1}-U_{2n}\right) \\ &= \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2^{2n}}\right)=\frac{1}{2^{2n+1}}>0.....\textbf{sur 0,5pt} \end{aligned}$$

De plus,

$$\left|U_{2n+1}-U_{2n}\right|=\frac{1}{2^{2n-1}}\longrightarrow 0 \text{ lorsque } n\to+\infty$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_{2n+1}-U_{2n}\right)=0.....\textbf{sur 0,5pt}$$

Les deux suites $\left(U_{2n+1}\right)_n$ et $\left(U_{2n}\right)_n$ sont adjacentes donc elles sont convergentes et convergent vers la même limite. Alors $\left(U_n\right)_n$ est convergente....**sur 0,5pt** (on peut aussi montrer que U_n est de Cauchy)

iv) $\left(U_{2n+1}\right)_n$ est croissante et majorée donc $\sup B=\lim_{n\to+\infty}U_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}U_{2n}=\inf A$, $\left(U_{2n}\right)_n$ est décroissante et majorée...**sur 0,5pt**

Exercice 4.(03pts)
Continuité en zéro:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}2x^3-\lim_{x\to0}x^3\ln\left(x^2\right)=0=f(0)\,....\textbf{sur 0,5pt}$$

Continuité sur $\left]0,e^{\frac{1}{3}}\right]$**:** $f(x)=2x^3-3x^3\ln\left(x^2\right)$ est continue comme produit et somme de fonctions continues ....**sur 0,25pt**

Dérivabilité sur $\left]0,e^{\frac{1}{3}}\right[$: $f(x)=2x^3-3x^3\ln\left(x^2\right)$ est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables ....**sur 0,25pt**

$f(0)=0=e\left(2-3\ln e^{\frac{2}{3}}\right)=f\left(e^{\frac{1}{3}}\right)$ ....**sur 0,5pt**

Le théorème de Rolle peut s'appliquer dans l'intervalle $\left[0,e^{\frac{1}{3}}\right]$, il existe $c\in\left]0,e^{\frac{1}{3}}\right[$ telle que

$$f'(c)=0......\textbf{sur 0,5pt}$$

Pour $x>0$

$$f'(x)=3x^2\left(2-3\ln x^2\right)-6x^2=-9x^2\ln x^2....\textbf{sur 0,5pt}$$

$$f'(c)=0\Leftrightarrow\ln c=0\Leftrightarrow c=1\in\left]0,e^{\frac{1}{3}}\right[\,....\textbf{sur 0,5pt}$$

Exercice 5.(04pts)

i)

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \neq f(0)$$

donc f n'est pas continue en zéro par la suite elle n'est pas dérivable en zéro...**sur 0,5pt**

ii) f n'admet pas de développement de Taylor au voisinage de zéro puisqu'elle n'est pas dérivable en zéro...**sur 0,5pt**

iii) Au voisinage de $-\infty$:

$$\begin{aligned} e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + O\left(y^2\right) \text{....}\textbf{sur 0,25p} \\ e^{\frac{1}{x}} &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{....}\textbf{sur 0,25pt} \\ xe^{\frac{1}{x}} &= x + 1 + \frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x}\right) \text{....}\textbf{sur 0,25pt} \end{aligned}$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} \ln(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + O\left(y^3\right) \text{....}\textbf{sur 0,25pt} \\ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{....}\textbf{sur 0,25pt} \\ x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + O\left(\frac{1}{x}\right) \text{....}\textbf{sur 0,25pt} \end{aligned}$$

iv) Asymptotes: au voisinage de $-\infty$, l'asymptote oblique a pour équation $y = x + 1$. De plus, comme $\frac{1}{2x} < 0$ l'asymptote est **au dessous** du graphe.....**sur 0,5pt+0,25pt**

Au voisinage de $+\infty$, l'asymptote oblique a pour équation $y = x - \frac{1}{2}$. De plus, comme $\frac{1}{3x} > 0$, l'asymptote est **au dessus** du graphe......**sur 0,5pt+0,25pt.**

Exercice 6.(03pts)

$$\begin{aligned} (1+y)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + O\left(y^2\right) \text{...}\textbf{sur 0,25pt} \\ \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + O\left(x^4\right) \text{....}\textbf{sur 0,25pt} \\ \arcsin x &= \arcsin 0 + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + O\left(x^5\right) \text{....}\textbf{sur 0,5pt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4\right) + O\left(x^5\right) \\ &= x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + O\left(x^5\right) \text{......}\textbf{sur 1,00pt} \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a:

$$g'(x) = 2f(x) \text{.....}\textbf{sur 0,5pt}$$

alors

$$g(x) = g(0) + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + O\left(x^6\right) \text{....}\textbf{sur 0,5pt}$$