Ecople Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran $\quad$ $1^{\text{ière}}$ année

Devoir surveillé du semestre 2 en Analyse 2 $\quad$ 2011/2012

Exercice 1: Calculer

$$\int \cos^{2011} x \sin x dx, \qquad \int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx, \qquad \int x \arctan x dx, \qquad \int \frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2} dx$$

Exercice 2: 1) Soit $a>0$. On considére l'intégrale

$$I=\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

Effectuer le changement de variable $y=\frac{1}{x}$ et déduire la valeur de I.

2) Même question pour

$$J=\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

avec le changement de variable $y=\pi-x$.

Exercice 3: I) Soit $a>0$ et soit l'équation différentielle

$$y'-\frac{y}{x}-y^2=-9x^2, \quad x>0$$

1) Déterminer a pour que $y_p(x)=ax$ soit une solution particulière.

2) Résoudre alors l'équation.

II) Résoudre l'équation différentielle

$$|x|\, y'+(x-1)\, y=x^3, x \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 4: Répondre par vraie ou faux en le justifiant

1) L'application définit par $N(x,y)=|x+y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Le domaine de définition de la fonction g est $\mathbb{R}^2$ avec :

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3) Si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles au point (x_0,y_0) alors f est continue.

4) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. f admet une différentielle au point (x_0,y_0) s'il existe une application $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=L(h,k)+o(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$$

BonCourage

Ecople Préparatoire en Sciences et Techniques d'Oran 1$^{\text{ière}}$ année

Devoir surveillé du semestre 2 en Analyse 2 2011/2012

Exercice 1: Calculer

$$\int \cos^{2011} x \sin x dx, \quad \int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx, \quad \int x \arctan x dx, \quad \int \frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2} dx$$

Exercice 2: 1) Soit $a>0$. On considére l'intégrale

$$I=\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

Effectuer le changement de variable $y=\frac{1}{x}$ et déduire la valeur de I.

2) Même question pour

$$J=\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

avec le changement de variable $y=\pi-x$.

Exercice 3: I) Soit $a>0$ et soit l'équation différentielle

$$y'-\frac{y}{x}-y^2=-9x^2, \quad x>0$$

1) Déterminer a pour que $y_p(x)=ax$ soit une solution particulière.

2) Résoudre alors l'équation.

II) Résoudre l'équation différentielle

$$|x| y'+(x-1) y=x^3, x \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 4: Répondre par vraie ou faux en le justifiant

1) L'application définit par $N(x,y)=|x+y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2) Le domaine de définition de la fonction g est $\mathbb{R}^2$ avec :

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{xy} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3) Si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles au point (x_0,y_0) alors f est continue.

4) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. f admet une différentielle au point (x_0,y_0) s'il existe une application $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=L(h,k)+o(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$$

BonCourage

Solution proposée

Exercice 1:

$$\int \cos^{2011} x \sin x dx = -\int \cos^{2011} x d(\cos x) = -\frac{\cos^{2012}(x)}{2012} + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx &= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{t^2+2t+3} dt \\
&= 2\int \frac{1}{(t+1)^2+2} dt = \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt \\
&= \sqrt{2}\int \frac{1}{y^2+1} dy = \sqrt{2}\arctan y + C \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \frac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-4}{x^6-2x^4+x^2} dx &= \int \frac{x^2-4}{x^2\left(x^4-2x^2+1\right)} dx = \int \frac{x^2-4}{x^2\left(x^2-1\right)^2} dx \\
&= \int \left(\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x-1}+\frac{a_4}{(x-1)^2}+\frac{a_5}{x+1}+\frac{a_6}{(x+1)^2}\right) dx \\
&= \int \left(-\frac{4}{x^2}+\frac{11}{4(x-1)}-\frac{3}{4(x-1)^2}-\frac{11}{4(x+1)}-\frac{3}{4(x+1)^2}\right) dx \\
&= \frac{4}{x}+\frac{11}{4}\ln|x-1|+\frac{3}{4(x-1)}-\frac{11}{4}\ln|x+1|+\frac{3}{4(x+1)}+C
\end{aligned}$$

Exercice 2:

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\ln\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}} \frac{-1}{y^2} dy = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln y}{1+y^2} dy = -I \Rightarrow I = 0$$

2)

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-y)\sin(\pi-y)}{1+\cos^2(\pi-y)}dy = \int_0^\pi \frac{(\pi-y)\sin(y)}{1+\cos^2(y)}dy \\
&= \int_0^\pi \frac{\pi\sin(y)}{1+\cos^2(y)}dy - \int_0^\pi \frac{y\sin(y)}{1+\cos^2(y)}dy = -\pi\arctan(\cos y)]_0^\pi - J \\
&= \frac{\pi^2}{2} - J
\end{aligned}$$

donc

$$2J = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow J = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 3:

1) En remplaçant dans l'équation on trouve

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

2) C'est une équation de Ricatti. Par le changement de variables

$$y = y_p + \frac{1}{z}$$

l'équation devient

$$z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1$$

dont la solution est donnée par

$$z = \frac{1}{6x} + \frac{C_1}{x}e^{-3x^2}$$

et alors la solution de notre équation est donnée par

$$y = 3x + \frac{1}{\frac{1}{6x} + \frac{C_1}{x}e^{-3x^2}}$$

II) Sur $]0, +\infty[$ l'équation devient

$$xy' + (x-1)\,y = x^3, x > 0$$

dont la solution est donnée par $y = x^2 - x + Cxe^{-x}$.

Sur $]-\infty, 0[$ l'équation devient

$$-xy' + (x-1)\,y = x^3, x < 0$$

dont la solution est donnée par $y = x^2 + 3x + 6 + \frac{C'e^x + 6}{x}$. La solution globale est donnée par

$$y = \begin{cases} x^2 - x + Cxe^{-x} & x > 0 \\ x^2 + 3x + 6 + \frac{C'e^x+6}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Exercice 4:

1) $N(x,y) = |x+y|$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$ car $N(-1,1) = 0$ et $(-1,1) \neq (0,0)$.

2) Faux car $D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\} \cup \{(0,0)\} \neq \mathbb{R}^2$.

3) Faux. La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ n'est pas continue en $(0,0)$ mais $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$

4) Faux, il faut que L soit en plus linéaire.