**Ecole Préparatoire en Sciences Economiques, Commerciales et Sciences de Gestion**
**Draria – ALGER -**

*Juin 2011*

# Epreuve d'Analyse du Second Semestre

Durée : 2 heures

*Avertissement : aucun document n'est permis.*

**Exercice 1** *(4 points)*

Montrer que la fonction *Sin* admet une réciproque sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ (on la note *Arcsin*) et que cette réciproque admet comme dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1;1[$ .

**Exercices 2** *(6 points)*

1°) Calculer l'intégrale $\int \frac{dt}{t(t-1)}$ .

2°) Calculer l'intégrale $\int \frac{dx}{x(x^3+1)}$ en effectuant le changement de variable $t=x^3+1$ et en utilisant la question 1°).

**Exercice 3** *(10 points)*

*Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de la solution de l'équation $e^{-x^2}=x$ qu'on ne peut résoudre analytiquement.*

1°) Montrer que l'équation $e^{-x^2}=x$ admet une racine $r$ et une seule dans l'intervalle $]0;1[$ .

2°) Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=e^{-x^2}$ ; Déterminer le minimum de la dérivée $f'(x)$ en étudiant ses variations.

3°) En utilisant le théorème des accroissements finis et la question 2°) montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R} \text{ on a } |f(y)-f(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot|y-x|$$

4°) On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_o=0$ et $u_n=f(u_{n-1})$ pour tout entier naturel $n$ non nul. Montrer que

$$|u_n-r|\leqslant\sqrt{\frac{2}{e}}|u_{n-1}-r|$$

où $r$ est la racine de $f(x) = x$

et en déduire que

$$|u_n-r|\leqslant\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right)^n|u_0-r|$$

(Remarquer que $f(r) = r$).

5°) Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a

$$|u_n-r|\leqslant(0,9)^n$$

6°) Trouver un entier naturel $n$ tel que $u_n$ soit une valeur approchée de la racine $r$ à $10^{-5}$ prés , c'est-à-dire vérifiant $|u_n-r|\leqslant10^{-5}$ .

**Barême :**

Exercice 1 : 4 pts (1pt + 3pts)
Exercice 2 : 1°) 3 pts ; 2°) 3 pts
Exercice 3 : 1°) 2 pts (1,5 p + 0,5 p) ; 2°) 2 pts ; 3°) 2 pts ; 4°) 2 pts (1 p + 1 p) ; 5°) 1 pt ; 6°) 1 pt