

Ecole Préparatoire En Sciences Economiques, Commerciales Et
Sciences De Gestion de Draria

ANNEE 2010-2011

1ère Année

22 février 2011

durée : 2 heures

EPREUVE D'ALGEBRE DU 1^{er} SEMESTRE

EXERCICE 1 (3 pts)

Soit $A, B,$ et C trois sous-ensembles d'un ensemble E vérifiant la relation

$$A \cup B \subset B \cap C$$

Démontrer que $A \subset B \subset C$.

EXERCICE 2 (3 pts=1,5+1,5)

$X, Y,$ étant deux parties d'un ensemble E ; \bar{X} et \bar{Y} les complémentaires de X et Y . Simplifier les expressions A et B définies par

- a) $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})$

- b) $B = (X \cup \bar{Y}) \cap (\bar{X} \cup Y) \cap (X \cup Y)$

En précisant toutes les propriétés à utiliser.

EXERCICE 3 (6 pts=2+3+1)

Dans \mathbb{Z} , on définit la relation \mathcal{R} par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = 7x - 7y)$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
2. Trouver $\bar{0}, \bar{1}$. Soit $a \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe \bar{a} de l'élément a .
3. Déterminer le graphe de la relation \mathcal{R} dans le plan.

EXERCICE 4 (8 pts=1+3+2+2)

Soient les fonctions f et h définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad h(x) = \sin x$$

1. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
2. On pose $E = \mathbb{R}_+ - \{1\}$ et $F =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$; et soit l'application g définie par

$$g : E \longrightarrow F \\ x \longmapsto g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

- a) Montrer que g est injective.
 - b) Montrer que g est surjective.
 - c) En déduire que g est bijective et déterminer sa réciproque g^{-1} .
3. Déterminer goh et hog en précisant les domaines de définition D_{goh} et D_{hog} .
 4. Soient $I = \{3, 4, 5\}$ et $J = [2, 5]$. Déterminer $g^{-1}(I)$ et $g(J)$.
(Indication : Pour calculer $g(J)$, utiliser la monotonie de g)