الدراسة النظرية

1 – حركة قذيفة

2 – الحركة المستقيمة المتغير بانتظام على مستو مائل :

1 – حركة قذيفة :

الموضوع :

نقذف، في اللحظة $t = 0\,s$ ، جسما كتلته m و مركز عطالته G، من وضع G_0 بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ نحو الأعلى بحيث يصنع شعاعها زاوية α مع مستو أفقي يمر من نقطة القذف.

1 – 1 – المعادلة التفاضلية للحركة :

أ / اختيار المعلم – الشرط الابتدائي للحركة :

الجسم الصلب المدروس كتلته m و مركز عطالته G . ندرس حركة هذا الجسم في مرجع مخبري أرضي (مرجع أرضي) الذي نعتبره مرجعا غاليليا.

نختار معلما كارتيزيا $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ لدراسة هذه الحركة.

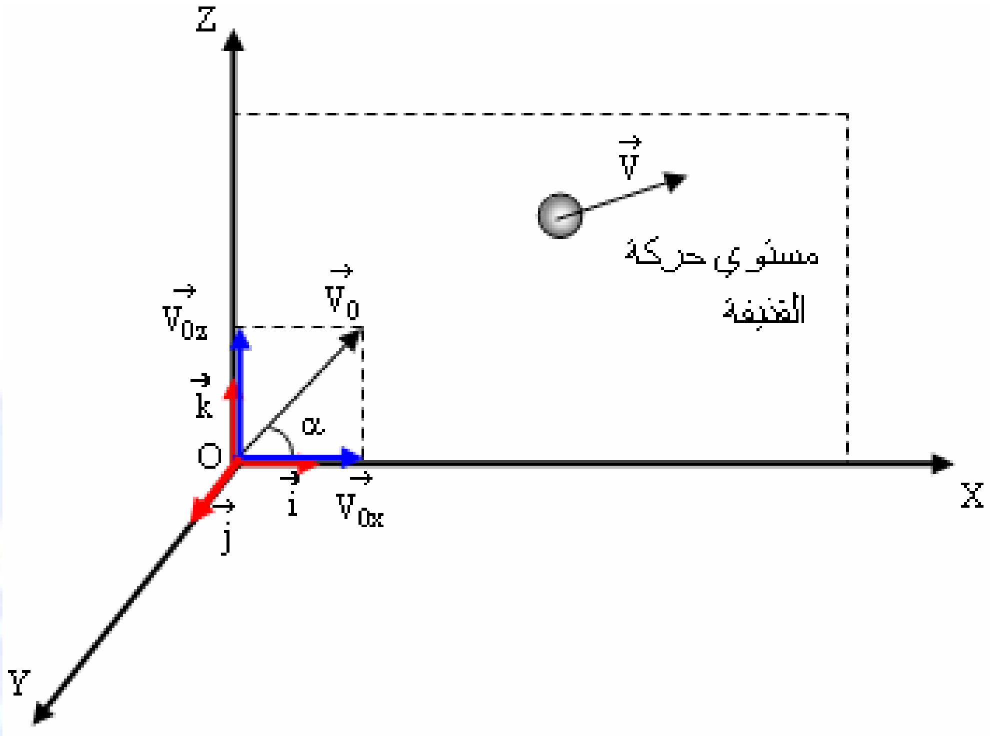
يقذف هذا الجسم من وضع ابتدائي G_0 بسرعة ابتدائية $\vec{V}_0$ في لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة $t = 0$.

الشرط الابتدائي للحركة معرف بالنسبة للحظة الابتدائية $t = 0\,s$. عند هذه اللحظة يكون مركز العطالة G في الوضع G_0، و تكون سرعته $\vec{V}_0$.

نعتبر في هذه الدراسة أنه لما $t = 0\,s$ ، يكون لدينا:

$$\vec{OG}(t=0) = \vec{OG}_0 = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + v_{0z}\,\vec{k}$$



يكتب شعاع السرعة في هذا المعلم على الشكل التالي:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + v_0 \sin\alpha \cdot \vec{k}$$

ب / الدراسة الديناميكية للموضوع :

القوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة الجسم الصاب أثناء حركته هي:

– قوة جذب الأرض للجسم تتمثل في قوة الثقل $\vec{P} = m.\vec{g}$.

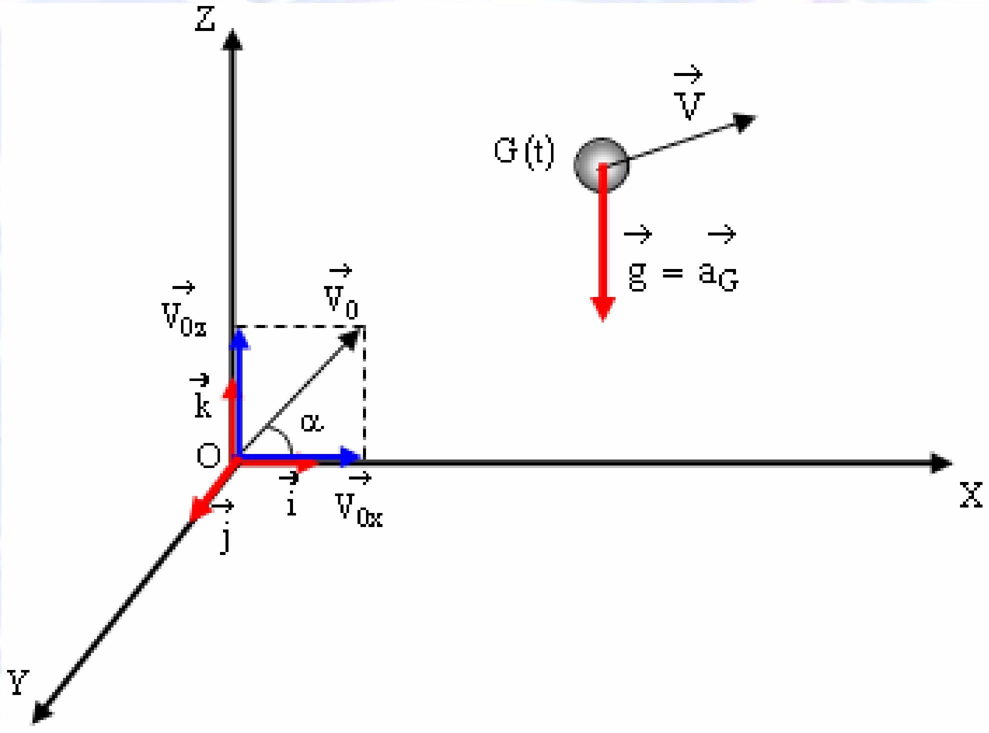
– قوة دافعة أرخميدس $\vec{F}_A$ في الهواء، نعتبرها دائما مهملة أمام قوة الثقل. تعتبر الكتلة الحجمية للقذيفة أكبر بكثير أمام الكتلة الحجمية للهواء الذي تتحرك فيه القذيفة.

– قوة الإحتكاك $\vec{F}_f$ مع الهواء، قيمتها تتزايد مع سرعة القذيفة. نعتبر أن سرعة القذيفة صغيرة إلى درجة أنه يمكن إهمال هذه المقاومة، الشيء الذي لا يمكن اعتباره دائما صحيحا.

نعتبر أن حركة القذيفة هي عبارة عن حركة سقوط حر في حقل جاذبية منتظم، حيث أن هذه القذيفة تخضع فقط لقوة جذب الأرض لها $\vec{P} = m.\vec{g}$ أثناء حركتها.

جـ / تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

نعلم أنه في المرجع الأرضي الذي نعتبره غاليلي، إذا كانت m كتلة الجسم الصاب و $\vec{a}_G$ تسارع مركز عطالته، فإن محصلة القوى الخارجية المطبقة عليه تعطى بالعلاقة: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$.



بما أن حركة القذيفة تعتبر سقوطا حرا في هذا المرجع، فيمكن كتابة:

$$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$$

و منه نستنتج أن:

$$\vec{g} = \vec{a}_G$$

نلاحظ من خلال هذه النتيجة أن شعاع تسارع مركز عطالة القذيفة في المعلم الكارتيزي يساوي شعاع الجاذبية الأرضية. كما أنه إذا اعتبرنا أن حقل الجاذبية الأرضية يكون منتظما في مجال حركة القذيفة، فإن شعاع التسارع يكون هو أيضا منتظما.

نحصل على مركبات شعاع التسارع في المعلم الكارتيزي $\left(0, \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}\right)$ بإسقاط شعاع التسارع $\vec{a}_G$ على المحاور الثلاثة فنجد:

$\vec{a}_x = \vec{0}$ و بالتالي تكون قيمة هذا الشعاع: $a_x = 0$

$\vec{a}_y = \vec{0}$ و بالتالي تكون قيمة هذا الشعاع: $a_y = 0$

$\vec{a}_z = \vec{g}$ و بالتالي تكون قيمة هذا الشعاع: $a_z = -g$

و بما أن التسارع هو المشتق الأول للسرعة، فإننا نكتب بالنسبة لكل مركبة:

$$\boxed{\frac{dv_x}{dt} = 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\frac{dv_y}{dt} = 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\frac{dv_z}{dt} = -g}$$

تدعى هذه المعادلات المعادلات التفاضلية لحركة قذيفة تقوم بحركة سقوط حر في حقل جاذبية منتظم.

1 – 2 – حل المعادلات التفاضلية :

أ / إحداثيات شعاع السرعة :

إحداثيات شعاع السرعة في المعلم الكارتيزي $\left(0, \vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k}\right)$ هي:

$$\vec{v}\left(\vec{v}_x, \vec{v}_y\, \vec{v}_z\right)$$

حيث أنه عند كل لحظة تتحقق العلاقة:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$$

كما أن قيمة شعاع السرعة عند لحظة ما تعطى بالعلاقة:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

نفهم من خلال هذا أنه لمعرفة قيمة شعاع السرعة عند لحظة t يجب تعيين قيمة كل مركبة من مركبات هذا الشعاع، ولتحقيق هذا هناك الطريقة التجريبية، الطريقة البيانية و الطريقة التي تعتمد على المعادلة الزمنية الخاصة بقيمة كل مركبة من مركبتي شعاع السرعة.

عندما نقوم بحل المعادلات التفاضلية التي تحصلنا عليها سابقا نتوصل إلى المعادلات الزمنية التي تخص قيمة كل مركبة من مركبات شعاع السرعة.

- بالنسبة للمحور $\overrightarrow{OX}$:

لدينا $\frac{dv_x}{dt} = 0$ هذا يعني أن السرعة v_x ثابتة، وبالتالي فإن مشتق عدد ثابت يساوي الصفر: $v_x = C_1$.

نستنتج قيمة الثابت C_1 من الشروط الابتدائية للسرعة.

- بالنسبة للمحور $\overrightarrow{OY}$:

لدينا $\frac{dv_y}{dt} = 0$ هذا يعني أن السرعة v_y ثابتة، وبالتالي فإن مشتق عدد ثابت يساوي الصفر: $v_y = C_2$.

نستنتج قيمة الثابت C_2 من الشروط الابتدائية للسرعة.

- بالنسبة للمحور $\overrightarrow{OZ}$:

لدينا: $\frac{dv_y}{dt} = -g$ هذا يعني أن: $dv_y = -gdt$

نجري التكامل التالي: $\int dv_y = -\int gdt$

فنجد:

$$v_y = -gt + C_3$$

الثابت C_3 يعين من الشرط الابتدائي للسرعة

من خلال هذا التحليل توصلنا إلى جملة المعادلات التالية:

$$v_z = -gt + C_3 \quad ، \quad v_y = C_2 \quad ، \quad v_x = C_1$$

تعيين الثوابت C_1 ، C_2 و C_3 يكون من الشرط الابتدائي للسرعة:

$$\vec{v}(t=0)=\vec{v}_0=v_{0x}\,\vec{i}+0\,\vec{j}+v_{0z}\,\vec{k}$$

نلاحظ أن :

$$C_3=v_{0z} \quad ، \quad C_2=v_{0y}=0 \quad ، \quad C_1=v_{0x}$$

شعاع السرعة في المعلم الكارتيزي $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لما يكون الشرط

$$\boxed{\vec{v}=\left(v_{0x}\right)\vec{i}+0\,\vec{j}\left(-gt+v_{0y}\right)\vec{k}}$$

ب / إحداثيات شعاع موضع مركز العطالة G : المعادلات الزمنية

موضع مركز عطالة القذيفة في المعلم الديكارتي $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معرف بإحداثيته (x,y,z) ، حيث أنه عند كل لحظة يحقق العلاقة :

$$\vec{OG}=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$$

- المعادلة الزمنية $x(t)$:

لدينا مما سبق: $v_x=v_{0x}=\dfrac{dx}{dt}$ و منه نجد: $dx=v_{0x}dt$.

بعد إجراء التكامل التالي: $\int dx=v_{0x}\int dt$ نجد:

$$x=v_{0x}t+k_1$$

- المعادلة الزمنية $x(t)$:

لدينا مما سبق: $0=\dfrac{dy}{dt}=v_y=v_{0y}$ و منه نجد: $dy=0dt$.

$$y=k_1$$

– المعادلة الزمنية $z(t)$:

نعلم أن :

$v_z = \frac{dz}{dt}$ و منه نجد: $dz = v_z dt = (-gt + v_{0z})dt$

بعد إجراء التكامل التالي: $\int dz = -g\int t\,dt + v_{0z}\int dt$ نجد:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + k_3$$

الثوابت k_1 ، k_2 و k_3 هي ثوابت التكامل تعين من الشرط الابتدائي لشعاع الموضع:

$$\vec{OG}(t=0) = \vec{OG}_0 = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

نستنتج إذن:

$k_1 = 0$ ، $k_2 = 0$ و $k_3 = 0$.

و منه نكتب عبارة شعاع الموضع في المعلم الكارتيزي $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$:

$$\boxed{\vec{OG} = (v_0 \cos\alpha\ \ t)\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\ t\right)\vec{k}}$$

1 – 3 – معادلة المسار:

معادلة المسار في المعلم الكارتيزي $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ هي معادلة تربط بين وضع المتحرك بالنسبة للمحور $\vec{OX}$ و وضعه بالنسبة للمحور $\vec{OZ}$، أي هي الدالة $z = f(x)$.

من خلال الدراسة السابقة توصلنا إلى تحديد وضع المتحرك في المعلم الكارتيزي بمعادلتين زمنيتين:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \ t \ ....(1) \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \ t \ ....(2) \end{cases}$$

للحصول على معادلة المسار، نستخرج الزمن من المعادلة (1) ثم نعوض عبارته في المعادلة (2):

من (1) نجد:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \ ....(3)$$

نعوض (3) في (2) فنجد:

$$\boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \text{tg}\,\alpha \ x}$$

معادلة المسار هي معادلة من الشكل : $z = ax^2 + bx$.

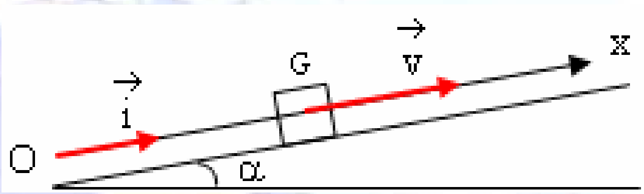
تتعلق هذه المعادلة بإحداثيات شعاع السرعة الابتدائي $\vec{v_0}$ و كذلك بإحداثيات شعاع موضع مركز العطالة $\vec{OG_0}$ في اللحظة الابتدائية التي تعتبر لحظة القذف.

كما أننا نلاحظ أن معادلة المسار هي معادلة من الدرجة الثانية في x ، فهي إذن معادلة قطع مكافئ.

2 – الحركة المستقيمة المتغير بانتظام على مستو مائل :

الموضوع :

نعتبر جسما صلبا كتلته m و مركز عطالته G. يقوم هذا الجسم بحركة انسحابية على مستو مائل بزاوية α بالنسبة للأفق. نهمل جميع قوى الاحتكاك. نقذف هذا الجسم، في اللحظة $t=0$ ، من أسفل المستوي المائل نحو الأعلى بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$. تتم حركة مركز عطالة الجسم وفق المحور $\left(O, \vec{i}\right)$ المرتبط بالمرجع الأرضي المبين على الشكل:



في اللحظة $t=0$ يكون مركز عطالة الجسم الصلب في الوضع O.

الأسئلة :

1 – مثل القوى الخارجية المؤثرة على مركز عطالة الجسم الصلب.

2 – بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، أوجد المعادلة التفاضلية للحركة. استنتج طبيعة الحركة.

3 – استنتج المعادلة الزمنية $v=f(t)$

4 – استنتج المعادلة الزمنية $x=f(t)$ للحركة.

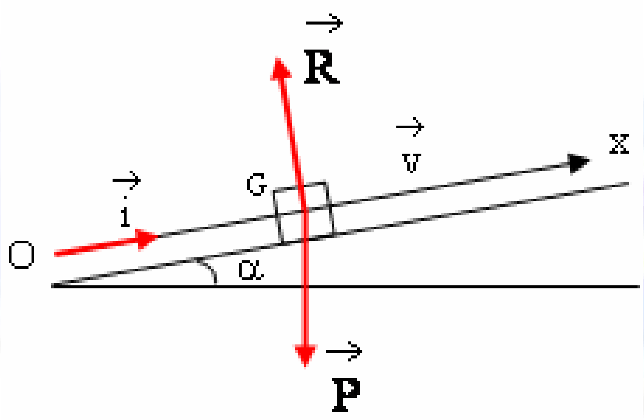
5 – عندما يصل الجسم الصلب إلى نقطة M تقع في أعلى المستوي المائل يتوقف قبل أن يشرع في النزول من جديد. أعط عبارة اللحظة الزمنية التي يصل فيها إلى الوضع M.

6 – استنتج عبارة x_M بدلالة g ، $\sin\alpha$ و v_0.

7 – نعتبر أن $\alpha = 10°$. ما هي قيمة السرعة v_0 التي يجب أن يقذف بها الجسم حتى يصل إلى الوضع M الذي فاصلته $x_M = 80cm$.

الإجابة:

1 – تمثيل القوى الخارجية المؤثرة على الجسم الصلب



2 – بما أن المرجع الأرضي يمكن اعتباره مرجعا غاليليا، فإننا نكتب:

$$\vec{P}+\vec{R}=m\,\vec{a}$$

بالنسبة للمحور $\left(O,\vec{i}\right)$ نكتب:

$$ma=-mg\sin\alpha$$

و منه نجد:

$$\boxed{\frac{dv}{dt}=-g\sin\alpha}$$

و هي المعادلة التفاضلية للحركة.

نلاحظ أن $\frac{dv}{dt}=cst$ إذن الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

3 – نحصل على المعادلة الزمنية $v=f(t)$ بعد إجراء التكامل على المعادلة: $dv=-g\sin\alpha\,dt$ ، فنجد: $v=-g\sin\alpha t+C_1$.

الثابت C_1 يعين من الشرط الابتدائي على السرعة و الذي هو:

لما $t=0$ لدينا: $\vec{v}_0=v_{0x}\,\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}$ و منه نجد:

$$v(t=0)=-g\sin\alpha\times 0+C_1=v_0$$

و منه تكون المعادلة الزمنية لسرعة مركز عطالة الجسم الصلب على المستوي المائل كما يلي:

$$\boxed{v(t)=-g\sin\alpha t+v_0}$$

ملاحظة:

يمكن كتابة عبارة شعاع السرعة اللحظية على الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{v}(t)=(-g\sin\alpha t+v_0)\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}}$$

4 – نحصل على المعادلة الزمنية $x=f(t)$ لحركة مركز عطالة الجسم الصلب بإجراء التكامل على: $dx=vdt=(-g\sin\alpha\;\; t+v_0)dt$ فنجد:

$$x=-\frac{1}{2}g\sin\alpha\;\; t^2+v_0t+C_2$$

الثابت C_2 يعين من الشرط الابتدائي لموضع المتحرك :

$$x(t=0)=x_0=-\frac{1}{2}g\sin\alpha\times 0^2+v_0\times 0+C_2=0$$

و منه تكون المعادلة الزمنية للحركة:

$$\boxed{x(t)=-\frac{1}{2}g\sin\alpha\;\; t^2+v_0t}$$

ملاحظة:

يمكن كتابة عبارة شعاع الموضع على الشكل التالي:

$$\boxed{\vec{OG}(t)=\left(-\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2+v_0t\right)\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}}$$

5 – عندما يصل المتحرك إلى الوضع M تنعدم سرعته:

$$v(M) = -g\sin\alpha t + v_0 = 0$$

و منه نجد:

$$\boxed{t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}}$$

6 – نعوض العبارة $t = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$ في المعادلة الزمنية للحركة فنجد:

$$\boxed{x_M = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}}$$

7 – باستعمال المعادلة : $x_M = \frac{v_0^2}{2g\sin\alpha}$ نجد:

$$v_0 = \sqrt{2g\, x_M \sin\alpha}$$

التطبيق العددي يعطي:

$$v_0 = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 0{,}80 \times \sin 10}$$

فنجد:

$$\boxed{v_0 = 1{,}65\ \text{m/s}}$$