الأعداد الأولية
المضاعف المشترك الأصغر

الكفاءات المستهدفة :

1- التعرف على أولية عدد
2- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي و قواسمه
3- استعمال تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر و القاسم المشترك الأكبر
4- استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر
5- استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر
6- استعمال مبرهنة بيزو
7- استعمال مبرهنة غوص ونتائجها

تصميم الدرس

أنشطة

I- الأعداد الأولية :

II- مبرهنة بيزو :

III- مبرهنة غوص :

تمـارين و مشكلات

الحلول

أنشطة

النشاط :

يملك فلاح قطعة أرضية أراد بيعها على شكل قطع أرضية متساوية .

لاحظ أنه إذا جزئها إلى قطع ذات $200m^2$ تتبقى لديه قطعة مساحتها $150m^2$ وإذا جزئها إلى قطع ذات $250m^2$ تتبقى قطعة مساحتها $200m^2$ وإذا جزئها إلى قطع ذات $300m^2$ تتبقى قطعة مساحتها $250m^2$.

أحسب S مساحة القطعة الأرضية إذا علمت أن $6000m^2 < S < 5000m^2$.

الحل :

لدينا :

$$S \equiv 150[200]$$
$$S \equiv 200[250]$$
$$S \equiv 250[300]$$

وعليه :

$$\begin{cases} S+50 \equiv 0[200] \\ S+50 \equiv 0[250] \\ S+50 \equiv 0[300] \end{cases}$$

إذن $S+50$ مضاعف مشترك للأعداد 200 ، 250 ، 300 .

ومنه $S+50$ مضاعف للمضاعف المشترك الأصغر μ للأعداد 200 ، 250 ، 300 .

$$PPCM\ (200;250;300) = 10 \times PPCM\ (20;25;30)$$
$$= 10 \times 5PPCM(4;5;6)$$
$$= 10 \times 5 \times 2 \times 5 \times 6 = 3000$$

وعليه : $\mu = 3000$ ومنه : $S + 50$ مضاعفة للعدد 3000 .

أي أن : $S + 50 = 3000k \quad , \quad k \ni \mathbb{N}^*$

وبالتالي : $S = 3000k - 50$ حيث : $k \ni \mathbb{N}^*$

لكن : $5000 < S < 6000$ وعليه : $5000 < 3000k - 50 < 6000$

إذن : $5050 < 3000k < 6050$

ومنه : $\frac{6050}{3000} < k < \frac{5050}{3000}$ أي أن : $1,68 < k < 2,01$ ومنه :

$k = 2$ وعليه : $S = 3000 \times 2 - 50$

ومنه : $S = 5950m^2$

I- الأعداد الأولية :

تعريف :

نقول عن عدد طبيعي N أنه أولي إذا وفقط إذا كان له قاسمان مختلفان فقط .

أمثلة :

2 عدد أولي لأن له قاسمان فقط هما 1 و 2 .

6 ليس عددا أوليا لأن له أكثر من قاسمين وقواسمه هي : 1،2،3،6 .

1 ليس عددا أوليا لأن له قاسم واحد فقط هو 1 .

0 ليس عددا أوليا لأنه يقبل القسمة على كل عدد طبيعي .

17 عدد أولي لأن له قاسمان فقط هما 1 و 17 .

مبرهنة 1 :

كل عدد طبيعي N غير أولي $(N \neq 1 , N \neq 0)$ يقبل على الأقل قاسما أوليا d بحيث :
$d^2 \leq N$.

البرهان :

بما أن N غير أولي ويختلف عن 1 وعن 0 فإنه يقبل على الأقل قاسما يختلف عن N وعن 1
. ليكن d أصغر هذه القواسم .

كل قاسم للعدد d هو قاسم للعدد N وهو أصغر من d وبالتالي لا يمكن أن يكون للعدد d أي قاسم أصغر من d ماعدا 1 إذن العدد d أولي .

بوضع : $N = dq$

العدد q قاسم للعدد N وهو يختلف عن 1 وعن N .

إذن : $d \leq q$ ومنه : $d^2 \leq dq$ وعليه : $d^2 \leq N$

البحث عن الأعداد الأولية :

من المبرهنة السابقة نستنتج ما يلي :

إذا كان N عددا طبيعيا أكبر من 1 وكان لا يقبل أي قاسم أولي d حيث $d^2 \leq N$ فإن N أولي .

مثال :

هل العدد 191 أولي .

نقوم بقسمة العدد 191 على كل من الأعداد الأولية d ثم نحسب d^2 في كل مرة كما يلي :

d	2	3	5	7	11	13	17
d^2	4	9	25	49	121	169	289
قابلية القسمة للعدد 191 على d	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل

وبما أن : $17^2 > 191$ و 17 لا يقسم 191 فإن 191 أولي .

مبرهنة 2 :

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

البرهان :

نبرهن أنه إذا أعطي عدد طبيعي N كيفي فإنه يوجد عدد أولي أكبر من N . لذلك نعتبر العدد $(N!+1)$

لدينا : $N! = N(N-1)(N-2)\ ...\ \times 2 \times 1$

وعليه كل عدد d حيث $1 < d \leq N$ يقسم $N!$

وبالتالي لا يقسم $(N!+1)$ لأن $N!$ و $(N!+1)$ أوليان فيما بينهما.

إذا كان $(N!+1)$ أوليا فإنه يوجد عدد أولي أكبر من N .

(لأن $N!+1$ أكبر من N) .

إذا كان $(N!+1)$ غير أولي فإنه يقبل قاسما أوليا وهذا القاسم أكبر من N بالضرورة .

ومنه يوجد عدد أولي أكبر من N .

وعليه مجموعة الأعداد الأولية لا تقبل عنصرا أكبر وعليه فهي غير منتهية .

الأعداد الأولية و الأعداد الأولية فيما بينها :

مفهوم العدد الأولي ومفهوم العدد الأولي مع عدد آخر مفهومان مختلفان . فمثلا 20 أولي مع 9 لكن 20 غير أولي وكذلك 9 غير أولي.

مبرهنة 3 :

إذا كان d عددا أوليا وكان N عددا طبيعيا لا يقبل القسمة على d فإن d و N أوليان فيما بينهما .

البرهان :

بما أن d أولي فإن قواسم d هي 1 و d فقط .

وبما أن N لا يقبل القسمة على d فإن القاسم المشترك الوحيد بين N و d هو 1 . ومنه N و d أوليان فيما بينهما .

نتائج :

1) كل عددين مختلفين و أوليين هما عددان أوليان فيما بينهما .

2) كل عدد أولي يكون أوليا مع أي عدد طبيعي غير معدوم وأصغر منه

3) إذا لم يقسم العدد الأولي d كل من الأعداد الطبيعية $a_1, a_2, ..., a_n$ فإنه أوليا مع كل منها وبالتالي يكون أوليا مع جداءها أي لا يقسم الجداء $(a_1 \times a_2 \times\ ...\ \times a_n)$ وبعبارة أخرى إذا قسم العدد الأولي d الجداء $(a_1 \times a_2 \times\ ...\ \times a_n)$ فإنه يقسم على الأقل أحد العوامل $a_1, a_2, ..., a_n$.

4) إذا قسم العدد الأولي d جداء عوامل أولية فإنه يساوي أحد عوامل

هذا الجداء .

تحليل عدد طبيعي غير أولي إلى جداء عوامل أولية :

مبرهنة 4 :

كل عدد طبيعي غير أولي وأكبر من 1 يقبل تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية .

البرهان :

N عدد طبيعي $N > 1$.

N غير أولي وعليه يقبل قاسما أوليا d_1 حيث : $N = d_1.q_1$

فإذا كان q_1 أوليا . انتهى التحليل .

وإذا كان q_1 غير أولي فإنه يقبل قاسما أوليا d_2 حيث : $q_1 = d_2.q_2$

ومنه : $N = d_1 d_2 q_2$

فإذا كان q_2 أوليا . انتهى التحليل وهكذا إذا كان q_2 غير أولي نستمر بنفس الطريقة .

وبعد عدد منته من المرات نصل إلى حاصل أولي ونكون قد وضعنا N على شكل جداء عوامل أولية

إذن : $N = d_1 \times d_2 \times \ ... \times d_p$ حيث : $d_1 < d_2 < \ ... < d_p$

لنبرهن أن هذا التحليل وحيد ، نفرض أنه يوجد تحليل آخر : $N = k_1 \times k_2 \times ... \times k_s$

حيث : $k_1 < k_2 < ... < k_s$

وعليه : $d_1 \times d_2 \times \ ... \times d_p = k_1 \times k_2 \times \ ... \times k_s \ ... (1)$

العدد d_1 يقسم الجداء $k_1 \times k_2 \times \ ... \times k_s$ وعليه فهو يساوي أحد هذه العوامل لكن k_1 هو أصغرها ومنه : $k_1 \leq d_1$

وكذلك k_1 يقسم الجداء $d_1 \times d_2 \times \ ... \times d_p$ وعليه k_1 يساوي أحد هذه العوامل لكن d_1 هو أصغرها ومنه : $d_1 \leq k_1$ وعليه : $d_1 = k_1$

ومنه : $d_2 \times d_3 \times \ ... \times d_p = k_2 \times k_3 \times \ ... \times k_s$

وبنفس الطريقة نجد : $d_2 = k_2$ ثم $d_3 = k_3$ ثم $d_s = k_s$

(حيث $S < P$) . وبالتالي بالتعويض نجد :

$$k_1 \times k_2 \times \ ... \times k_s \times d_{s+1} \times \ ... \times d_p = k_1 \times k_2 \times \ ... \times k_s$$

وعليه بعد الاختزال نجد : $d_{s+1} \times \ ... \times d_p = 1$ ومنه التحليل وحيد .

ملاحظة :

في تحليل N يمكن أن تكون بعض العوامل الأولية متساوية فبعد تجميع العوامل الأولية المتساوية يكتب العدد N كما يلي :

$$N = a_1^{p_1} \times a_2^{p_2} \times ... \times a_q^{p_q}$$

حيث : a_1 , a_2 , . . . , a_q أعداد أولية .

P_1 , P_2 , . . . , P_q أعداد طبيعية .

مثال 1 :

حلل إلى جداء عوامل أولية العدد : 7560

الحل :

7560	2
3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$7560 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

مثال 2 :

حلل إلى جداء عوامل أولية العدد : 80000

الحل :

$$80000 = 8 \times 10^4 = 2^3 \times (2 \times 5)^4$$
$$= 2^3 \times 2^4 \times 5^4$$
$$= 2^7 \times 5^4$$

عدد قواسم عدد طبيعي :

مبرهنة 5 :

عدد قواسم العدد المحلل إلى جداء العوامل كما يلي :

$$N = a_1^{P_1} \times a_2^{P_2} \times \ . \ . \ . \ \times a_q^{P_q}$$

هو : $\left(1+P_1\right)\left(1+P_2\right)\times\ ...\ \times\left(1+P_{q-1}\right)\left(1+P_q\right)$

البرهان :

لدينا : $N=a_1^{P_1}\times a_2^{P_2}\times\ ...\ \times a_q^{P_q}$

فإذا كان d قاسما للعدد N فإن : $d=a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times\ ...\ \times a_q^{\alpha_q}$

حيث : $0\le\alpha_1\le P_1$ و $0\le\alpha_2\le P_2$ و ... و $0\le\alpha_q\le P_q$

ولدينا : $\left(1+P_1\right)$ إمكانية لاختيار الأس α_1 .

$\left(1+P_2\right)$ إمكانية لاختيار الأس α_2 .

$\vdots$

$\left(1+P_q\right)$ إمكانية لاختيار الأس α_q .

وعليه عدد قواسم d هو : $\left(1+P_1\right)\left(1+P_2\right)\times\ ...\ \times\left(1+P_q\right)$.

مثال : ما هو عدد قواسم العدد 180 . عين كل القواسم .

الحل :

لدينا : $180=18\times10=3^2\times2\times10=2^2\times3^2\times5$

وعليه عدد قواسم 180 هو : $\left(1+2\right)\left(1+2\right)\left(1+1\right)=18$

* تعيين قواسم 180 : كل قاسم للعدد 180 من الشكل $2^\alpha\times3^\beta\times5^\gamma$

حيث : $0\le\alpha\le2$ و $0\le\beta\le2$ و $0\le\gamma\le1$

قيم α	قيم β	قيم γ	قواسم العدد 180

1	$0 = \gamma$	$\beta = 0$	$\alpha = 0$
5	$1 = \gamma$		
3	$0 = \gamma$	$\beta = 1$	
15	$1 = \gamma$		
9	$0 = \gamma$	$\beta = 2$	
45	$1 = \gamma$		
2	$0 = \gamma$	$0 = \beta$	$\alpha = 1$
10	$1 = \gamma$		
6	$0 = \gamma$	$1 = \beta$	
30	$1 = \gamma$		
18	$0 = \gamma$	$2 = \beta$	
90	$1 = \gamma$		
4	$0 = \gamma$	$0 = \beta$	$\alpha = 2$
20	$1 = \gamma$		
12	$0 = \gamma$	$1 = \beta$	
60	$1 = \gamma$		
36	$0 = \gamma$	$2 = \beta$	
180	$1 = \gamma$		

القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية :

تعريف :

القاسم المشترك الأكبر للأعداد $N_1 \, , N_2 \, , \ldots , N_p$ هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تحليلات الأعداد : $N_1 \, , N_2 \, , \ldots , N_p$ بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس .

مثال :

احسب : $PGCD(1000 \; ; \; 480 \; ; \; 250)$

الحل :

$$1000 = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$$

$$480 = 48 \times 10 = 3 \times 16 \times 2 \times 5$$
$$= 3 \times 2^4 \times 2 \times 5$$
$$= 2^5 \times 3 \times 5$$

$$250 = 25 \times 10 = 5^2 \times 2 \times 5$$
$$= 2 \times 5^3$$

إذن : $PGCD(1000 \; ; \; 480 \; ; \; 250) = 2 \times 5 = 10$

المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية :

تعريف :

المضاعف المشترك الأصغر للأعداد $N_1 \, , N_2 \, , \ldots , N_p$ هو جداء العوامل الأولية في تحليلات الأعداد : $N_1 \, , N_2 \, , \ldots , N_p$ بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس .

مثال :

احسب $PPCM \; (1000 \; ; \; 480 \; ; \; 250)$

الحل :

$$1000 = 2^3 \times 5^3 \quad ; \quad 480 = 2^5 \times 3 \times 5 \quad ; \quad 250 = 2 \times 5^3$$

ومنه : $PPCM \; (1000 \; ; \; 480 \; ; \; 250) = 2^5 \times 3 \times 5^3 = 12000$

II- مبرهنة بيزو :

مبرهنة 1 : (تقبل دون برهان) .

إذا كان d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين غير المعدومين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان α_0 و β_0 يحققان : $\alpha_0 a + \beta_0 b = d$

مثال :

لدينا : $PGCD(24 ; 9) = 3$

لنبحث عن عددان صحيحان α_0 و β_0 بحيث : $24\alpha_0 + 9\beta_0 = 3$

نلاحظ أن $\alpha_0 = -1$ و $\beta_0 = 3$ يحققان المعادلة $24(-1) + 9(3) = 3$

مبرهنة 2 (مبرهنة بيزو) :

يكون العددان الطبيعيان غير المعدومين a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد على الأقل عددان صحيحان α , β حيث $\alpha a + \beta b = 1$

البرهان :

* إذا كان a و b أوليان فيما بينهما فإن: $PGCD(a ; b) = 1$
وحسب المبرهنة 1 فإنه يوجد عددان صحيحان α و β
بحيث : $\alpha a + \beta b = 1$

*إذا وجد عددان صحيحان α و β بحيث $\alpha a + \beta b = 1$ وكان $PGCD(a ; b) = d$
فإن : d يقسم a و b وعليه d يقسم αa و βb
وعليه : d يقسم $\alpha a + \beta b$ وعليه : d يقسم 1 ومنه : $d = 1$
وعليه a و b أوليان فيما بينهما .

تطبيقات على مبرهنة بيزو :

1) إذا كان العدد الطبيعي a أولي مع كل من العددين الطبيعيين b و c فإنه يكون أولي مع الجداء $b.c$.

البرهان :

بما أن a أولي مع b فإنه يوجد عددان صحيحان α و β
بحيث : $\alpha a + \beta b = 1 \quad . . . (1)$

وبما أن a أولي مع c فإنه يوجد عددان صحيحان α' و β'

بحيث : $\alpha' a + \beta' c = 1 \ldots (2)$

من (1) و (2) : $(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = 1$

وعليه : $\alpha\alpha' a^2 + \alpha\beta' ac + \alpha'\beta ab + \beta\beta' bc = 1$

إذن : $(\alpha\alpha' a + \alpha\beta' c + a'\beta b)a + (\beta\beta')bc = 1$

بوضع $\alpha\alpha' a + \alpha\beta' c + a'\beta b = \gamma$ و $\beta\beta' = \delta$

نجد : $\gamma a + \delta bc = 1$

وحسب نظرية بيزو فإن a و bc أوليان فيما بينهما .

2) إذا كان العدد الطبيعي a أولي مع الأعداد الطبيعية b_1 , b_2 , . . . , b_n

فإن a أولي مع الجداء : $b_1 \times b_2 \times \ . \ . \ . \ \times b_n$ و يبرهن بالتراجع

من أجل $n \geq 2$.

وبصفة خاصة : إذا كان : $b_1 = b_2 = \ . \ . \ . \ = b_n = b$

فإن a أولي مع الجداء b^n .

III- مبرهنة غوص :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و c عدد صحيح غير معدوم .

إذا قسم العدد a الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

البرهان :

بما أن a يقسم bc فإنه يوجد عدد صحيح q بحيث : $bc = a.q$

وبما أن a أولي مع b فإنه يوجد عددان صحيحان α و β

بحيث : $\alpha a + \beta b = 1$ (حسب مبرهنة بيزو) .

وبضرب طرفيها في c نجد : $\alpha ac + \beta bc = c$

إذن : $\alpha ac + \beta .aq = c$ وعليه : $a(\alpha c + \beta q) = c$

بوضع : $\alpha c + \beta q = p$ نجد : $a.p = c$ وعليه a يقسم c .

تطبيقات على مبرهنة غوص :

1) إذا قبل العدد الطبيعي b القسمة على كل من العددين الطبيعيين

a_1 و a_2 وكان a_1 و a_2 أوليان فيما بينهما فإن b يقبل القسمة
على $a_1 \times a_2$.

البرهان : بما أن a_1 يقسم b فإنه يوجد عدد صحيح q بحيث : $b = a_1.q$ وبما أن a_2 يقسم

b فإن a_2 يقسم $a_1.q$

لكن a_2 أولي مع a_1 وعليه حسب مبرهنة غوص فإن a_2 يقسم q
أي يوجد عدد صحيح p بحيث : $q = a_2.p$
وعليه : $b = a_1.a_2.p$ ومنه $a_1.a_2$ يقسم b .
2) إذا قبل العدد الطبيعي b القسمة على كل من الأعداد الطبيعية
a_1 , a_2 , . . . , a_n الأولية فيما بينها مثنى مثنى فإن b يقبل القسمة
على $a_1 \times a_2 \times \ . \ . \ . \ \times a_n$ وتبرهن بالتراجع من أجل $n \geq 2$.
مثال 1 :
العدد 396 يقبل القسمة على كل من العددين 2 و 11 الأوليان فيما بينهما وعليه فهو يقبل القسمة
على 22 .
مثال 2 :
عين كل الأعداد الصحيحة x و y بحيث : $5x = 7y$.
الحل :
لدينا $5x = 7y$ وعليه 5 يقسم $7y$ و 5 أولي مع 7 ومنه 5 يقسم y وعليه يوجد عدد
صحيح k بحيث : $y = 5k$
وعليه : $5x = 7 \times 5k$ ومنه : $x = 7k$
إذن : $x = 7k$ و $y = 5k$ مع $k \in \mathbb{Z}$

مثال 3 :
حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x - 3y = 2 \ . \ . \ . \ (1)$ علما أن $(1 \ ; \ 1)$ حل
خاص لها .
الحل :
لدينا : $5x - 3y = 2$ و $5(1) - 3(1) = 2$
وعليه : $5x - 3y = 5(1) - 3(1)$

وبالتالي : $5(x-1)=3(y-1) \ldots (1)$

لدينا 5 يقسم $3(y-1)$ و 5 أولي مع 3 و حسب مبرهنة غوص

فإن : 5 يقسم $y-1$ إذن يوجد عدد صحيح k بحيث : $y-1=5k$ إذن :

$y=5k+1$

وبالتعويض في (2) نجد : $5(x-1)=3\times 5k$

وعليه : $x-1=3k$ أي : $x=3k+1$

وعليه حلول (1) هي الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حيث : $x=3k+1$

و $y=5k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية :

عند البحث عن القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد يمكن تعويض عددين منها بقاسمهما المشترك الأكبر .

مثال :

احسب $PGCD(200\ ;\ 150\ ;\ 40)$

الحل :

$$\begin{aligned} PGCD(200\ ;\ 150) &= PGCD(10\times 20\ ;\ 10\times 15) \\ &= 10\times PGCD(20\ ;\ 15) \\ &= 10\times 5\times PGCD(4\ ;\ 3) \\ &= 50\times 1 = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PGCD(40\ ;\ 50) &= 10PGCD(4\ ;\ 5) \\ &= 10\times 1 \ = 10 \end{aligned}$$

ومنه : $PGCD(200\ ;\ 150\ ;\ 40)=10$

الأعداد الأولية فيما بينها إجماليا :

تعريف :

نقول عن الأعداد $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ أنها أولية فيما بينها إجماليا إذا كان قاسمها المشترك الأكبر مساويا إلى 1 .

- علاقة بين $PGCD(a\ ;\ b)$ و $PPCM(a\ ;\ b)$

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

δ قاسمهما المشترك الأكبر .

فيكون : $a = \delta a'$ و $b = \delta \times b'$ و $PGCD(a' , b') = 1$

ليكن x مضاعف مشترك للعددين a و b وهو موجب تماما .

x مضاعف a و b وعليه يوجد عددان صحيحان α و β

بحيث : $x = \alpha a$ و $x = \beta b$

ومنه : $x = \alpha \delta a'$ و $x = \beta \times \delta b'$

إذن : $\alpha \delta a' = \beta \times \delta b'$ وبالتالي : $\alpha a' = \beta b'$

لدينا a' يقسم $\beta b'$ و a' أولي مع b' ومنه a' يقسم β أي يوجد عدد طبيعي q بحيث : $\beta = q \times a'$

وبالتالي : $x = \beta b = qa'b = qa'b' \times \delta$ ومنه : $x = (\delta ab')q$

بوضع : $\mu = \delta a'b'$ فإن : $\mu = \delta a'b' = ab' = b \times a'$

ومنه كل مضاعف مشترك للعددين a و b هو مضاعف للعدد μ وكل مضاعف للعدد μ هو مضاعف مشترك للعددين a و b .

ومنه المضاعفات المشتركة للعددين a و b هي مضاعفات μ

حيث : μ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

ولدينا : $\mu = \delta a'b'$ و $\mu \times \delta = \delta a' \times \delta b'$

وعليه : $\mu \times \delta = a \times b$ أي أن : $\mu = \dfrac{a \times b}{\delta}$

فإذا كان : $\delta = 1$ فإن : $\mu = a \times b$

مبرهنة 1 :

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين هي مجموعة مضاعفات مضاعفهما المشترك الأصغر .

مبرهنة 2 :

جداء عددين طبيعيين هو جداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر .

مبرهنة 3 :

a , b , λ أعداد طبيعية غير معدومة :

$$PPCM(\lambda a \; ; \lambda b) = \lambda \times PPCM(a \; ; b)$$

البرهان :

لدينا : $PPCM(\lambda a\ ;\ \lambda b)\times PGCD(\lambda a\ ;\ \lambda b)=(\lambda a).(\lambda b)$ ومنه

: $PPCM(\lambda a\ ;\ \lambda b)\times \lambda PGCD(a\ ;\ b)=\lambda(\lambda ab)$

وعليه : $PPCM(\lambda a\ ;\ \lambda b)\times PGCD(a\ ;\ b)=\lambda\times ab$

أي أن : $PPCM(\lambda a\ ;\ \lambda b)=\dfrac{\lambda a\times b}{PGCD(a\ ;\ b)}$

وعليه : $PPCM(\lambda a\ ;\ \lambda b)=\dfrac{\lambda\times PPCM(a\ ;\ b)\times PGCD(a\ ;\ b)}{PGCD(a\ ;\ b)}$

وبالتالي : $PPCM(\lambda a\ ;\ \lambda b)=\lambda PPCM(a\ ;\ b)$

مثال :

$$PPCM(100\ ;\ 150)=50PPCM(2\ ;\ 3)=50\times 2\times 3=300$$

المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية :

عند البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية يمكن تعويض عددين منها بمضاعفهما المشترك الأصغر .

مثال : احسب : $PPCM(150\ ;\ 200\ ;\ 350)$

* نحسب أولا : $PPCM(150\ ;\ 200)$

$$PPCM(150\ ;\ 200)=PPCM(50\times 3\ ;\ 50\times 4)$$

$$=50\times PPCM\ (3\ ;\ 4)=50\times 3\times 4=600$$

فيكون : $PPCM(150\ ;\ 200\ ;\ 350)=PPCM(600\ ;\ 350)$

ومنه : $PPCM(600\ ;\ 350)=PPCM(50\times 12\ ;\ 50\times 7)$

$$= 50 \times PPCM\ (12\ ;\ 7) = 50 \times 12 \times 7 = 4200$$

وبالتالي : $PPCM(150\ ;\ 200\ ;\ 350) = 4200$

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

حلل كل من الأعداد الآتية إلى جداء عوامل أولية

$$A = 44 \times 50 \quad ; \quad B = 80 \times 77 \quad ; \quad C = 45 \times 100$$

ثم استنتج قاسمها المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر .

التمرين 2 .

أوجد القواسم المشتركة للعددين α و β حيث : $\alpha = 18459$
و $\beta = 3809$

التمرين 3 .

أوجد عددين a و b بحيث $PPCM\ (a;b) = 2226$ و $a + b = 148$

التمرين 4 .

أوجد أصغر عدد طبيعي عدد قواسمه 8 .

التمرين 5 .

1) ادرس أولية العدد 211 .

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $x^2 - y^2 = 211$.

التمرين 6 .

عين العددين x و y بحيث : $\mu - 18\delta = 791$

وحيث : $\delta = PGCD(x;y)$ و $\mu = PPCM\ (x;y)$

التمرين 7 .

1) احسب $PGCD(765;459;1683)$.

2) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $765x+459y=1683$.

3) عين الحلول $(x\ ;\ y)$ للمعادلة السابقة بحيث : $|x|+|y|<10$.

التمرين 8 .

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $52x-44y=92$.

2) نفرض أن $PGCD(x;y)=\delta$. ما هي القيم الممكنة للعدد δ .

3) عين الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حلول المعادلة بحيث $\delta=23$.

4) عين الثنائيات $(x\ ;\ y)$ حلول المعادلة بحيث $-10<x<40$.

التمرين 9 .

1) ادرس حسب قيم n بواقي قسمة 3^n على 5 .

2) U_0 , r عددان طبيعيان غير معدومين.

(U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r .

أ- عين U_0 و r علما أن U_0 و r أوليان فيما بينهما و $U_0^2=U_{10}-U_1$

ب- نفرض $U_0=3$, $r=1$ نضع $S_n=U_0+U_1+...+U_n$

$P_n=U_0\times U_1\times...\times U_n$. - احسب S_n و P_n بدلالة n .

- عين العدد q بحيث : $2P_q=(2010)!$ ثم تحقق أن : $3^q\equiv2[5]$

- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $2S_n+2=3^q\ [5]$

التمرين 10 .

1) عين الثنائيات الصحيحة $(x';y')$ بحيث : $9x'-14y'=13$

علما أن $(3;1)$ حل لها .

2) نعتبر المعادلة : $45x-28y=130$.

- بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل لها فإن $x\equiv0[2]$ و $y\equiv0[5]$

- ثم حل هذه المعادلة .

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{2\alpha\alpha3}$ في نظام تعداد أساسه 9 و يكتب

$\overline{5\beta\beta6}$ في نظام تعداد أساسه 7 . عين α و β ثم اكتب N في

النظام العشري .

التمرين 11 .

1) حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 120 .

2) α و β عددان طبيعيان . نضع $a=\alpha+4\beta$ و $b=2\alpha+7\beta$

بين أن $PGCD(\alpha\ ;\ \beta)=PGCD(a\ ;\ b)$.

3) عين العددين x و y من $\mathbb{N}$ بحيث :

$\begin{cases}(x+4y)(2x+7y)=5880\\ xy=7\mu\end{cases}$ حيث μ هو $PPCM(x;y)$.

التمرين 12 .

نعتبر المعادلة : $43x-13y=\lambda\ \ldots(1)$ حيث λ, y, x أعداد صحيحة.

1) تحقق أن $(-3\lambda\ ;-10\lambda)$ حل للمعادلة (1) .

ثم عين كل الحلول $(x;y)$.

2) N عدد طبيعي يكتب : $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6

ويكتب : $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

- بين أن α و β و γ تحقق : $43\alpha-13\beta=\gamma$.

- عين α و β و γ ثم اكتب N في النظام العشري .

التمرين 13 .

1) عين كل الثنائيات $(x;y)$ للأعداد الصحيحة بحيث :

$$(1)\ldots 5x-3y=7$$

2) نفرض $(x;y)$ حل للمعادلة (1) .

- ما هي القيم الممكنة لـ : $PGCD(x;y)$.

3) عين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون $PGCD(x;y)$

مساويا إلى أكبر قيمة .

التمرين 14 .

1) a و b عددان طبيعيان غير معدومين و أوليان فيما بينهما .

- بين أن أحد العددين $a+b$ و $a\times b$ زوجي و الآخر فردي .

2) عين قواسم العدد 84 .

3) عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة x و y بحيث : $x+y=84$

و $\mu=\delta^2$ وحيث : $\mu=PPCM(x;y)$ و $\delta=PGCD(x;y)$

التمرين 15 .

1) اثبت أن العددين 993 و 170 أوليان فيما بينهما .

2) لتكن المعادلة : $993x-170y=143 \ldots (1)$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ- عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) بحيث : $x_0+y_0=6$.

ب- عين كل الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) .

3) جد أصغر عدد طبيعي a بحيث يكون باقي قسمة العدد $a-1$ على كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب .

الحـلـــــــول

التمرين 1

تحليل كل من A و B و C إلى جداء عوامل أولية :

$$A=44\times50=4\times11\times5\times10=2^2\times11\times5\times2\times5$$

$$A=2^3\times5^2\times11$$

$$B=80\times77=8\times10\times7\times11=2^3\times2\times5\times7\times11$$

$$B=2^4\times5\times7\times11$$

$$C=45\times100=9\times5\times10^2=3^2\times5\times(2\times5)^2$$

$$=3^2\times5\times2^2\times5^2$$

$$C=2^2\times3^2\times5^3$$

$$PGCD(A;B;C)=2^2\times5=20$$

$$PPCM(A;B;C)=2^4\times5^3\times3^2\times7\times11$$

$$=1386000$$

التمرين 2

- نعين أولا : $PGCD(18459;3809)$

$$3809 = 13 \times 293$$

$$18459 = 3^2 \times 7 \times 293$$

ومنه : $PGCD(18459;3809) = 293$

(ويمكن استعمال خوارزمية إقليدس) .

وعليه القواسم المشترك للعددين α و β هي قواسم العدد 293 .

وبما أن 293 عدد أولي فإن قواسمه هي 1 ، 293

إذن القواسم المشتركة للعددين α و β هي 1 ، 293 .

التمرين 3

إيجاد a و b :

نفرض : $PGCD(a;b) = \delta$

لدينا : $a = \delta.a'$ و $b = \delta b'$ مع a' و b' أوليان فيما بينهما .

ولدينا : $\delta \times 2226 = a \times b$ ومنه : $\delta \times 2226 = \delta a' \times \delta b'$

وعليه : $\delta a'b' = 2226$ وبما أن : $a + b = 148$

فإن : $\delta a' + \delta b' = 148$ وعليه : $\delta(a' + b') = 148$

ومنه δ يقسم 148 .

لنبحث عن قواسم 148 :

لدينا : $148 = 2^2 \times 37$

ومنه قواسم 148 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 37 ، 74 ، 148 .

1) $\delta = 1$: $\begin{cases} a'b' = 2226 \\ a' + b' = 148 \end{cases}$ ومنه a' و b' هما حلين

للمعادلة : $x^2 - 148x + 2226 = 0$.

$\Delta' = 3250$ وعليه : $\sqrt{\Delta'} \simeq 57,008$

إذن لا توجد حلول طبيعية للمعادلة .

2) $\delta = 2$: $\begin{cases} a'b' = 1113 \\ a' + b' = 74 \end{cases}$ ومنه a' و b' هما حلين

للمعادلة : $x^2 - 74x + 1113 = 0$.

$\Delta' = 256$ ومنه للمعادلة حلين .

$x_1 = 37 - 16 = 21$ ، $x_2 = 37 + 16 = 53$

إذن إما $a' = 21$ و $b' = 53$

وعليه : $a = 2 \times 21 = 42$ و $b = 2 \times 53 = 106$

أو $a' = 53$ و $b' = 21$ وعليه : $a = 106$ و $b = 42$

3) $\delta = 4$: $\begin{cases} a'b' = 556{,}5 \\ a' + b' = 37 \end{cases}$ مرفوض .

4) $\delta = 37$: $\begin{cases} a'b' \simeq 60{,}1 \\ a' + b' = 4 \end{cases}$ مرفوض .

5) $\delta = 74$: $\begin{cases} a'b' \simeq 30{,}08 \\ a' + b' = 2 \end{cases}$ مرفوض .

6) $\delta = 168$: $\begin{cases} a'b' \simeq 15{,}04 \\ a' + b' = 1 \end{cases}$ مرفوض .

التمرين 4

أصغر عدد طبيعي له 8 قواسم يكون واحد من هذين العددين :

$a_1 \times a_2^3$ أو a_1^7.

وحتى يكون أصغر عدد فإن : a_1 ، a_2 تكون أصغر ما يمكن أي : 3×2^3 أو 2^7

وعليه العددان هما : 128 أو 24 .

ومنه أصغر عدد له 8 قواسم هو 3×2^3 أي 24 .

التمرين 5

1) دراسة أولية العدد 211 :

القاسم الأولى	قابلية القسمة على a	a^2	مقارنة a^2 و 209
2	لا يقبل القسمة	4	$a^2 < 211$
3	لا يقبل القسمة	9	$a^2 < 211$
5	لا يقبل القسمة	25	$a^2 < 211$
7	لا يقبل القسمة	49	$a^2 < 211$
11	لا يقبل القسمة	121	$a^2 < 211$
13	لا يقبل القسمة	169	$a^2 < 211$
17	لا يقبل القسمة	289	$a^2 > 211$

بما أن العدد 211 لا يقبل أي قاسم أولى a بحيث $a^2 < 211$ فإن العدد 211 أولى .

2) حل المعادلة : $x^2 - y^2 = 211$

إذن هي تكافئ : $(x-y)(x+y) = 211$

وبما أن : $x - y < x + y$ فإن : $x - y = 1$ و $x + y = 211$

وبالجمع نجد : $2x = 212$ أي أن : $x = 106$

وعليه : $y = 105$. ومنه الحل هو $(106;105)$.

التمرين 6

تعيين x و y :

لدينا : $x.y = \delta\mu$ لكن : $x = \delta x'$ و $y = \delta y'$ بحيث x' و y' أوليان فيما بينهما .

ومنه : $\delta x'.\delta y' = \delta\mu$ أي : $\mu = \delta x'.y'$

وبما أن : $\mu - 18\delta = 791$ فإن : $\delta x'y' - 18\delta = 791$

أي أن : $\delta(x'y' - 18) = 791$ إذن δ يقسم العدد 791 .

لدينا : $791 = 7 \times 113$

ومنه قواسم 791 هي : 1 ، 7 ، 113 ، 791 .

لما $\delta = 1$ نجد : $x'y' - 18 = 791$ وعليه : $x'y' = 809$

* $x' = 1$ ، $y' = 809$ ومنه : $x = 1$ و $y = 809$
* $x' = 809$ ، $y' = 1$ ومنه : $x = 809$ و $y = 1$

لما $\delta = 7$ نجد : $x'y' - 18 = 113$ وعليه : $x'y' = 131$

* $x' = 1$ ، $y' = 131$ ومنه : $x = 7$ و $y = 917$
* $x' = 131$ ، $y' = 1$ ومنه : $x = 917$ و $y = 7$

لما $\delta = 113$: $x'y' - 18 = 7$ وعليه : $x'y' = 25$

* $x' = 1$ ، $y' = 25$ ومنه : $x = 113$ و $y = 2825$
* $x' = 25$ ، $y' = 1$ ومنه : $x = 2825$ و $y = 113$

لما $\delta = 791$: $x'y' - 18 = 1$ وعليه : $x'y' = 19$

* $x' = 1$ ، $y' = 19$ ومنه : $x = 791$ و $y = 15029$

التمرين 7

1) حساب $PGCD(765;459;1683)$:

نستعمل خوارزمية إقليدس :

* حساب $PGCD(765;459)$:

$$765 = 459 \times 1 + 306$$
$$459 = 306 \times 1 + 153$$
$$306 = 153 \times 2 + 0$$

ومنه : $PGCD(765;459) = 153$.

* حساب $PGCD(153;1683)$:

$$1683 = 153 \times 11 + 0$$

ومنه : $PGCD(153;1683) = 153$

إذن : $PGCD(765;459;1683) = 153$.

2) حل المعادلة : $765x + 459y = 1683$

بقسمة الطرفين على 153 نجد : $5x + 3y = 11$

نلاحظ أن : $(4;-3)$ حل خاص وعليه : $5x + 3y = 5\times 4 + 3(-3)$

إذن : $5x - 5\times 4 = -3y + 3(-3)$

$$5(x-4) = 3(-y-3)$$

لدينا 3 يقسم $5(x-4)$ و 3 أولي مع 5 وعليه 3 يقسم $x-4$ أي يوجد عدد صحيح k

بحيث : $x - 4 = 3k$ ومنه : $x = 3k + 4$

وعليه : $5\times 3k = 3(-y-3)$ وعليه : $-y-3 = 5k$ ومنه :

$y = -5k - 3$. الحلول هي $(3k+4;-5k-3)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

3) تعيين الحلول $(x;y)$ بحيث : $|x| + |y| < 10$

إذن : $|3k+4| + |-5k-3| < 10$

نزيل القيمة المطلقة للعبارة : $P(x) = |3k+4| + |-5k-3|$

k	$-\infty$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{5}$	$+\infty$
$3k+4$	$-3k-4$	0 $3k+4$		$3k+4$
$\|-5k-3\|$	$-5k-3$	$-5k-3$	0	$5k+3$
$P(x)$	$-8k-7$	$-2k+1$		$8k+7$

نحل المتراجحة $P(x) < 10$: مع $x \in \mathbb{Z}$

* لما $k \in \left]-\infty;\frac{-4}{3}\right]$:

$-8k - 7 < 10$ وعليه : $-8k < 17$ ومنه : $k > \frac{-17}{8}$

وبالتالي : $k \in \mathbb{Z}$ و $k \in \left]\frac{-17}{8};\frac{-4}{3}\right]$

وعليه : $k=-2$ ومنه : $(x;y)=(-2;7)$

* لما $k\in\left]\frac{-4}{3};\frac{-3}{5}\right]$ و $k\in\mathbb{Z}$:

$-2k+1<10$ وعليه : $-2k<9$ ومنه : $k<\frac{-9}{2}$

وعليه : $k=-1$ ومنه : $(x;y)=(1;2)$

* لما $k\in\left]\frac{-3}{5};+\infty\right[$ و $k\in\mathbb{Z}$:

$8k+7<10$ وعليه : $8k<3$ ومنه : $k<\frac{3}{8}$

وبالتالي : $k\in\left[\frac{-3}{5};\frac{3}{8}\right[$ و $k\in\mathbb{Z}$

وعليه : $k=0$ ومنه : $(x;y)=(4;-3)$.

التمرين 8

1) حل المعادلة : $52x-44y=92$

* نحسب $PGCD(52;44;92)$:

$$52=2^2\times13$$
$$44=2^2\times11$$
$$92=2^2\times23$$

وعليه : $PGCD(52;44;92)=2^2=4$

وبقسمة طرفي المعادلة على 4 نجد : $13x-11y=23$

نلاحظ أن $(6;5)$ حل خاص ومنه : $13x-11y=13\times6-11\times5$

ومنه : $13x-13\times6=11y-11\times5$

إذن : $13(x-6)=11(y-5)$

لدينا 11 يقسم $13(x-6)$ و 11 أولي مع 13 وعليه 11 يقسم $x-6$

أي يوجد عدد صحيح k بحيث : $x-6=11k$

ومنه : $x=11k+6$ إذن : $13\times 11k=11(y-5)$

ومنه : $y-5=13k$ وعليه $y=13k+5$

الحلول هي : $(11k+6;13k+5)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) تعيين القيم الممكنة للعدد δ :

لدينا δ يقسم x و δ يقسم y ومنه δ يقسم $13x$ و $11y$

وعليه δ يقسم $13x-11y$ إذن δ يقسم 23 .

ومنه قيم δ الممكنة هي 1 و 23 .

3) تعيين الحلول $(x;y)$ بحيث $\delta=23$:

إذن : $x=23x'$ و $y=23y'$ و x' و y' أوليان فيما بينهما .

وبالتالي : $13\times 23x'-11\times 23y'=23$

وعليه : $13x'-11y'=1$

نلاحظ أن $(6;7)$ حل خاص ومنه : $13x'-11y'=13\times 6-11\times 7$

وعليه : $13x'-13\times 6=11y'-11\times 7$

ومنه : $13(x'-6)=11(y'-7)$

لدينا 13 يقسم $11(y'-7)$ و 13 أولي مع 11 وعليه 13 يقسم $(y'-7)$

ومنه : $y'-7=13\alpha$ إذن : $y'=13\alpha+7$

وعليه : $13(x'-6)=11\times 13\alpha$ ومنه : $x'-6=11\alpha$

إذن : $x'=11\alpha+6$ وبالتالي : $x=23(11\alpha+6)$

$x=253\alpha+138$

$y=23(13\alpha+7)$ ومنه : $y=299\alpha+161$

الحلول هي : $(253\alpha+138\ ;\ 299\alpha+161)$ مع $\alpha\in\mathbb{Z}$.

4) تعيين الحلول $(x;y)$ بحيث : $-10<x<40$

إذن : $-10 < 11k + 6 < 40$

$-16 < 11k < 34$

ومنه : $\frac{-16}{11} < k < \frac{34}{11}$ أي : $-1,45 < k < 3,09$

إذن قيم k هي : 3 ، 2 ، 1 ، 0 ، -1 ومنه الحلول هي :

$(28;31)$, $(39;44)$, $(-5;-8)$, $(6;5)$, $(17;18)$.

التمرين 9

1) دراسة بواقي قسمة 3^n على 5 :

$3^0 \equiv 1[5]$; $3^1 \equiv 3[5]$; $3^2 \equiv 4[5]$; $3^3 \equiv 2[5]$; $3^4 \equiv 1[5]$

وعليه : $3^{4P} \equiv 1[5]$ و $3^{4P+1} \equiv 3[5]$; $3^{4P+2} \equiv 4[5]$; $3^{4P+3} \equiv 2[5]$

2) أ) تعيين U_0 و r : $U_0^2 = U_{10} - U_1 \quad . . . (1)$

لدينا : $U_1 = U_0 + r$ و $U_{10} = U_0 + 10r$

وبالتعويض في (1) نجد : $U_0^2 = (U_0 + 10r) - (U_0 + r)$

ومنه : $U_0^2 = 9r$

لدينا : U_0 يقسم $9r$ و U_0 أولي مع r ومنه حسب مبرهنة غوص :

U_0 يقسم 9 .

إذن قيم U_0 الممكنة هي : 1 ، 3 ، 9 .

* لما $U_0 = 1$: $1 = 9r$ أي : $r = \frac{1}{9}$ مرفوض .

* لما $U_0 = 3$: $9 = 9r$ ومنه : $r = 1$.

* لما $U_0 = 9$: $9^2 = 9r$ ومنه : $r = 9$

مرفوض لأن U_0 أولي مع r .

ومنه : $U_0 = 3$ و $r = 1$.

ب) حساب S_n :

لدينا : $S_n = \frac{n+1}{2}\left(U_0 + U_n\right)$ حيث : $U_0 = 3$ ، $U_n = U_0 + nr$

ومنه : $U_n = 3 + n$ وعليه : $S_n = \frac{n+1}{2}(6+n)$

- حساب P_n :

$$P_n = U_0 \times U_1 + \ ... \ \times U_n$$

$$P_n = U_0 \times (U_0 + r) \ ... \ \times (U_0 + nr)$$

$$P_n = 3 \times 4 \times 5 \times \ ... \ \times (n+3)$$

$$P_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ ... \ \times (n+3)}{1 \times 2} = \frac{(n+3)!}{2!}$$

- تعيين q : $2p_q = (2010)!$ ومنه : $(q+3)! = 2010!$

إذن : $q + 3 = 2010$ وعليه : $q = 2007$.

- التحقق من أجل $3^{2007} \equiv 2[5]$:

لدينا : $2007 = 4 \times 581 + 3$ ومنه : $3^{2007} \equiv 2[5]$.

- تعيين n بحيث : $2S_n + 2 \equiv 3^q[5]$

إذن : $(n+1)(6+n) + 2 \equiv 2[5]$

$$6n + n^2 + 6 + n + 2 \equiv 2[5]$$

$$n^2 + 7n + 6 \equiv 0[5]$$

$$n^2 + 2n + 1 \equiv 0[5]$$

إذن : $(n+1)^2 \equiv 0[5]$

إذن : $n + 1 \equiv 0[5]$ ومنه : $n \equiv -1[5]$

إذن : $n \equiv 4[5]$ وعليه : $\alpha \in \mathbb{N}$ و $n = 5\alpha + 4$.

التمرين 10

1) تعيين $(x' ; y')$:

لدينا : $9x' - 14y' = 9 \times 3 - 14 \times 1$

ومنه : $9x' - 9 \times 3 = 14y' - 14 \times 1$

إذن : $9(x' - 3) = 14(y' - 1)$

لدينا 9 يقسم $14(y' - 1)$ و 9 أولي مع 14 وعليه 9 يقسم $y' - 1$ أي :

$y' - 1 = 9k \;,\; k \in \mathbb{Z}$ إذن : $y' = 9k + 1$

وعليه : $9(x' - 3) = 14 \times 9k$ ومنه : $x' - 3 = 14k$

وعليه : $x' = 14k + 3$ إذن : $(x'; y') = (14k + 3; 9k + 1)$

حيث : $k \in \mathbb{Z}$

2) تبيان أن : $x \equiv 0[2]$ و $y \equiv 0[5]$

لدينا : $45x - 28y = 130$

وعليه : $45x = 28y + 130$ وعليه : $45x = 2(14y + 65)$

لدينا 2 يقسم $45x$ و 2 أولي مع 45 وعليه حسب مبرهنة غوص :

2 يقسم x . إذن : $x \equiv 0[2]$

وكذلك : $28y = 130 - 45x$ ومنه : $28y = 5(26 - 9x)$

لدينا 5 يقسم $28y$ و 5 أولي مع 28 وعليه حسب مبرهنة غوص :

5 يقسم y . إذن : $y \equiv 0[5]$.

- حل المعادلة :

بما أن $x \equiv 0[2]$ فإن : $x = 2x'$

بما أن $y \equiv 0[5]$ فإن : $y = 5y'$

وعليه : $45 \times 2x' - 28 \times 25y' = 130$

وعليه : $10(9x' - 7y') = 130$ إذن : $9x' - 7y' = 13$

وقد سبق حلها : $x' = 14k + 3$ و $y' = 9k + 1$

إذن : $x = 2(14k+3)$ و $y = 5(9k+1)$

وعليه : $x = 28k+6$ و $y = 45k+5$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3) تعيين α و β :

لدينا : $N = 3\times 9^0 + \alpha\times 9^1 + \alpha\times 9^2 + 2\times 9^3$

ومنه : $N = 3 + 9\alpha + 81\alpha + 1458$

إذن : $N = 1461 + 90\alpha \ . . . (1)$

مع $\alpha \le 8$

ولدينا : $N = 6\times 7^0 + \beta\times 7^1 + \beta\times 7^2 + 5\times 7^3$

ومنه : $N = 6 + 7\beta + 49\beta + 1715$

إذن : $N = 1721 + 56\beta \ . . . (2)$

مع $\beta \le 6$

وعليه من (1) و (2) : $1461 + 90\alpha = 1721 + 56\beta$

وعليه : $90\alpha - 56\beta = 260$

إذن : $45\alpha - 28\beta = 130$

وحلول هذه المعادلة مما سبق :

$\alpha = 28k+6 \ , \ \beta = 45k+5 \ , \ k \in \mathbb{N}$

وبما أن : $\alpha \le 8$ و $\beta \le 6$

فإن : $28k + 6 \le 8$ و $45k + 5 \le 6$

إذن : $28k \le 2$ و $45k \le 1$

إذن : $k \le \frac{2}{28}$ و $k \le \frac{1}{4}$

ومنه : $k = 0$ إذن : $\alpha = 6$ و $\beta = 5$

وبالتالي : $N = 1461 + 90\times 6$ إذن : $N = 2001$

التمرين 11

1) التحليل :

لدينا : $120 = 12\times 10 = 2^2\times 3\times 2\times 5$

إذن : $120 = 2^3\times 3\times 5$

2) نبين أن : $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(a;b)$

نفرض : $PGCD(\alpha;\beta)=\delta_1$ و $PGCD(a;b)=\delta_2$

لدينا : δ_1 يقسم كل من α و β وعليه : δ_1 يقسم كل من $\alpha+4\beta$ و $2\alpha+7\beta$

وعليه δ_1 يقسم a و b وبالتالي δ_1 يقسم δ_2 . . . (1).

ولدينا : δ_2 يقسم كل من a و b وعليه : δ_2 يقسم كل من $\alpha+4\beta$ و $2\alpha+7\beta$.

إذن δ_2 يقسم $-2(\alpha+4\beta)$ و $2\alpha+7\beta$.

أي δ_2 يقسم $-2\alpha-8\beta$ و $2\alpha+7\beta$.

إذن δ_2 يقسم $(2\alpha+7\beta)+(-2\alpha-8\beta)$.

وعليه δ_2 يقسم $-\beta$ وعليه δ_2 يقسم β .

وكذلك لدينا δ_2 يقسم $-7(\alpha+4\beta)$ و $4(2\alpha+7\beta)$

إذن δ_2 يقسم $-7\alpha-28\beta$ و $8\alpha+28\beta$

وعليه δ_2 يقسم $(8\alpha+28\beta)+(-7\alpha-28\beta)$ وعليه δ_2 يقسم α .

إذن δ_2 يقسم α و β وعليه δ_2 يقسم δ_1 . . . (2) .

من (1) و (2) : δ_1 يقسم δ_2 و δ_2 يقسم δ_1 وعليه : $\delta_1=\delta_2$.

وعليه : $PGCD(\alpha;\beta)=PGCD(a;b)$.

3) تعيين x و y :
$$\begin{cases}(x+4y)(2x+7y)=580\\ x\times y=7\mu\end{cases}$$

بما أن : $x\times y=\delta\times\mu$ حيث : $PGCD(x;y)=\delta$

ومنه : $\delta=7$ وعليه : $x=7x'$ و $y=7y'$

مع x' و y' أوليان فيما بينهما .

وعليه : $(7x'+4\times 7y')(2\times 7x'+7\times 7y')=5880$

إذن : $7(x'+4y')\times 7(2x'+7y')=5880$

وعليه : $(x'+4y')(2x'+7y')=120$

وبما أن x' و y' أوليان فيما بينهما فإن $2x'+7y'$ و $x'+4y'$ أوليان فيما بينهما

.

من السؤال 2 : $PGCD(x';y') = PGCD(x'+4y';2x'+7y')$

ولدينا : $x'+4y' < 2x'+7y'$

* $x'+4y'=1$ و $2x'+7y'=120$

وعليه : $-2x'-8y'=-2$ و $2x'+7y'=120$

بالجمع نجد : $-y=118$ مرفوض .

* $x'+4y'=3$ و $2x'+7y'=40$

وعليه : $-2x'-8y'=-6$ و $2x'+7y'=40$

بالجمع نجد : $-y=34$ مرفوض .

* $x'+4y'=5$ و $2x'+7y'=24$

وعليه : $-2x'-8y'=-10$ و $2x'+7y'=24$

بالجمع نجد : $-y=14$ مرفوض .

* $x'+4y'=8$ و $2x'+7y'=15$

ومنه : $-2x'-8y'=-16$ و $2x'+7y'=15$

بالجمع نجد : $-y=-1$ أي : $y=1$

وعليه : $x'=4$ ومنه : $x=28$ و $y=7$

التمرين 12

1) التحقق من أن $(-3\lambda;-10\lambda)$ حل للمعادلة (1) :

$43(-3\lambda)-13(-10\lambda) = -129\lambda+130\lambda = \lambda$ ومنه هو حل .

- تعيين كل الحلول : $(x;y)$

لدينا : $43x-13\lambda = 43(-3\lambda)-13(-10\lambda)$

ومنه : $43x-43(-3\lambda) = 13y-13(-10\lambda)$

$$43(x+3\lambda) = 13(y+10\lambda)$$

لدينا : 13 يقسم $43(x+3\lambda)$ و 13 أولي مع 43

ومنه : 13 يقسم $x+3\lambda$ إذن : $x+3\lambda = 13k$

وعليه : $x = 13k-3\lambda$ ومنه : $43\times 13k = 13(y+10\lambda)$

إذن : $y+10\lambda=43k$ وعليه : $y=43k-10\lambda$

الحلول هي : $(13k-3\lambda\ ;\ 43k-10\lambda)$, $k\in\mathbb{Z}$

2) نبين أن : $43\alpha-13\beta=\gamma$

لدينا : $N=\alpha\times6^0+\beta\times6^1+\alpha\times6^2+\beta\times6^3+\alpha\times6^4$

حيث : $1\leq\alpha\leq5$ و $0\leq\beta\leq5$

ومنه : $N=1333\alpha+222\beta\ ...\ (1)$

ولدينا : $N=\gamma\times5^0+\gamma\times5^1+\gamma\times5^2+0\times5^3+\beta\times5^4$

إذن : $N=625\beta+31\gamma\ ...\ (2)$

حيث : $0\leq\gamma\leq4$ و $1\leq\beta\leq4$

وعليه من (1) و (2) : $1333\alpha+222\beta=625\beta+31\gamma$

$$1333\alpha-403\beta=31\gamma$$

بالقسمة على 31 نجد : $43\alpha-13\beta=\gamma$

- تعيين α و β و γ :

مما سبق حلول هذه المعادلة معطاة في (1) كما يلي :

$\alpha=13k-3\gamma$ و $\beta=43k-10\gamma$

* من أجل $\gamma=0$: $\alpha=13k$ و $\beta=43k$ مرفوض .

* من أجل $\gamma=1$: $\alpha=13k-3$ و $\beta=43k-10$

مرفوض من أجل جميع قيم k .

* من أجل $\gamma=2$: $\alpha=13k-6$ و $\beta=43k-20$

مرفوض من أجل جميع قيم k .

* من أجل $\gamma=3$: $\alpha=13k-9$ و $\beta=43k-30$

مرفوض من أجل جميع قيم k .

* من أجل $\gamma=4$: $\alpha=13k-12$ و $\beta=43k-40$

وهي صحيحة من أجل $k=1$ فنجد : $\alpha=1$ و $\beta=3$

وبالتالي : $N=1333\times1+222(3)=$ $N=1999$

التمرين 13

1) تعيين الثنائيات $(x;y)$: $5x-3y=7$

نلاحظ أن $(2;1)$ حل خاص .

وعليه : $5x-3y=5\times 2-3\times 1$ وعليه :

$5x-5\times 2=3y-3\times 1$ إذن : $5(x-2)=3(y-1)$

3 يقسم $5(x-2)$ و 3أولي مع 5 ومنه حسب مبرهنة غوص

3 يقسم $x-2$ أي أن : $x-2=3\alpha$

وعليه : $x=3\alpha+2$ مع $\alpha\in\mathbb{Z}$ ومنه :

$$5(3\alpha)=3(y-1)$$

إذن : $y-1=5\alpha$ وعليه : $y=5\alpha+1$

الحلول هي : $(3\alpha+2\ ;\ 5\alpha+1)$ مع $\alpha\in\mathbb{Z}$

2) القيم الممكنة لـ $PGCD(x;y)$:

نفرض δ هو $PGCD(x;y)$ وعليه : δ يقسم x و y

ومنه : δ يقسم $5x-3y$ إذن : δ يقسم 7

وعليه القيم الممكنة للعدد δ هي 1 ، 7 .

3) تعيين x و y بحيث : $\delta=7$

لدينا : $x=7x'$ و $y=7y'$ بحيث x' و y' أوليان فيما بينهما .

لكن : $5x-3y=7$ ومنه : $5\times 7x'-3\times 7y'=7$

أي أن : $7(5x'-3y')=7$ ومنه : $5x'-3y'=1$

نلاحظ أن $(2;3)$ حل خاص .

وعليه : $5x'-3y'=5\times 2-3\times 3$

$$5x'-5\times 2=3y'-3\times 3$$

وعليه : $5(x'-2)=3(y'-3)$

لدينا 3 يقسم $5(x'-2)$ و 3 أولي مع 5 وحسب مبرهنة غوص

فإن 3 يقسم $x'-2$ إذن $x'-2=3k$ أي $x'=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $5\times 3k=3(y'-3)$ وعليه : $y'-3=5k$ ومنه : $y'=5k+3$

إذن : $x = 7(3k+2)$ و $y = 7(5k+3)$

أي أن : $x = 21k+14$ و $y = 35k+21$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$

التمرين 14

1) لدينا a و b أوليان فيما بينهما .
ومنه لا يمكن أن يكون a و b زوجيين معا .
ومنه أحدهما فردي و الآخر زوجي أو فرديين معا .
فإذا كان أحدهما فرديا و الآخر زوجيا فإن مجموعهما فردي
و جداؤهما زوجي .
وإذا كانا فرديين معا فإن مجموعهما زوجي و جداؤهما فردي .

2) تعيين قواسم 84 :

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ ومنه قواسم 84 هي :

1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 7 ، 12 ، 14 ، 21 ، 28 ، 42 ثم 84 .

3) تعيين x و y :

لدينا : $x = \delta x'$ و $y = \delta y'$ مع x' و y' أوليان فيما بينهما .

ومنه : $\mu = \delta x'y'$ وعليه : $\begin{cases} \delta(x'+y') = 84 \\ \delta \times x'y' = \delta^2 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} \delta(x'+y') = 84 \\ x'y' = \delta \end{cases}$ إذن : $(x' \times y')(x'+y') = 84$

وبما أن : x' و y' أوليان فيما بينهما فإن $x' \times y'$ و $x'+y'$ أوليان فيما بينهما من (1) .

إذن : $(x' \times y') \times (x'+y') = 84$.

* $x'+y' = 1$ و $x' \times y' = 84$:

لدينا x', y' حلين للمعادلة $t^2 - t + 84 = 0$.

$0 > \Delta$ ومنه ليس للمعادلة حلول .

* $x' + y' = 3$ و $x' \times y' = 28$ نجد y', x' حلين للمعادلة :

$$t^2 - 4t + 21 = 0$$

$0 > \Delta'$ ومنه ليس للمعادلة حلول .

* $x' + y' = 7$ و $x' \times y' = 12$ وعليه x' و y' حلين للمعادلة :

$$\Delta = 1 \quad ، \quad t^2 - 7t + 12 = 0$$

ومنه : $t_1 = 3$ و $t_2 = 4$

$x' = 3$ و $y' = 4$ أو $x' = 4$ و $y' = 3$ و $\delta = 12$

وعليه : $x = 36$ و $y = 48$ أو $x = 48$ و $y = 36$.

* $x' + y' = 12$ و $x' \times y' = 7$: x' و y' حلين للمعادلة :

$$\Delta' = 29 \quad ، \quad t^2 - 12t + 7 = 0$$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{29}$ وعليه لا توجد حلول طبيعية .

* $x' + y' = 21$ و $x'y' = 4$: x' و y' حلين للمعادلة :

$$\Delta = 425 \quad ، \quad t^2 - 21t + 4 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{425}$ وعليه لا توجد حلول طبيعية .

* $x' + y' = 28$ و $x'y' = 3$: x' و y' حلين للمعادلة :

$$\Delta' = 193 \quad ، \quad t^2 - 28t + 3 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{193}$ وعليه لا توجد حلول طبيعية .

* $x' + y' = 84$ و $x'y' = 1$: x' و y' حلين للمعادلة :

$$\Delta' = 1763 \quad ، \quad t^2 - 84t + 1 = 0$$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1763}$ وعليه لا توجد حلول طبيعية .

وعليه : $x = 36$ و $y = 48$

أو $x = 48$ و $y = 36$.

التمرين 15

1) إثبات أن 993 و 170 أوليان فيما بينهما :

993 = 170 × 5 + 143

170 = 143 × 1 + 27

143 = 27 × 5 + 8

27 = 8 × 3 + 3

8 = 3 × 2 + 2

3 = 2 × 1 + 1

2 = 1 × 1 + 0

وعليه : $PGCD(993;170)=1$

2) أ) تعيين الحل الخاص :

لدينا : $\begin{cases} x_0+y_0=6 \\ 993x_0-170y_0=143 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} y_0=6-x_0 \\ 993x_0-170(6-x_0)=143 \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} y_0=6-x_0 \\ 1163x_0=1163 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=5 \end{cases}$

إذن $(1;5)$ حل خاص .

ب) حل المعادلة :

لدينا : $993x-170y=993\times 1-170\times 5$

ومنه : $993(x-1)=170(y-5)$

لدينا 993 يقسم $170(y-5)$ و 993 أولي مع 170 وعليه 993 يقسم $y-5$ وعليه

$y-5=993k$ أي أن $y=993k+5$

وعليه : $993(x-1)=170\times 993k$ ومنه : $x-1=170k$

إذن : $x=170k+1$

الحلول هي : $(170k+1;993k+5)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3) تعيين a :

لدينا : $\begin{cases} a-1\equiv 14[1986] \\ a-1\equiv 300[340] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} a\equiv 15[1986] \\ a\equiv 301[340] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} a-15=1986\alpha \\ a-301=340\beta \end{cases}$ وعليه : $\begin{cases} a=15+1986\alpha \\ a=301+340\beta \end{cases}$

إذن : $15+1986\alpha=301+340\beta$

إذن : $1986\alpha-340\beta=286$

بالقسمة على 2 نجد : $993\alpha-170\beta=143$

ومنه حسب (2) : $\alpha=170k+1$ و $\beta=993k+5$

ومنه : $a=15+1986(170k+1)$ أي : $a=337620k+2001$

ومنه أصغر قيمة للعدد a هي 2001 من أجل $k=0$ إذن $a=2001$.