المستقيمات و المستويات في الفضاء

الكفاءات المستهدفة :

1- استعمال التمثيلات الوسيطية لحل مسائل الاستقامية أو التلاقي أو انتماء أربع نقط إلى نفس المستوى

2 - الانتقال من التمثيل الوسيطي إلى المعادلة الديكارتية و العكس

3- الانتقال من جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم إلى التمثيل الوسيطي

4- تحديد الوضع النسبي لمستويين أو لمستقيمين

5- تحديد الوضع النسبي لمستقيم و مستو

6- تعيين تقاطع مستويين ، مستقيمين ، مستقيم و مستو

تصميم الدرس

أنشطة

1- مميزات المرجح :

2- التمثيل الوسيطي لمستقيم و لمستو :

3- التمثيل الديكارتي لمستقيم

4- التقاطع و التوازي في الفضاء لمستويين :

تمـارين و مشكلات

الحـلـــــــول

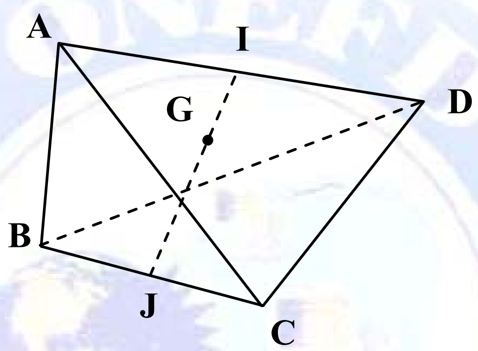
أنشطة

ABCD رباعي وجوه . I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$.

G هي مرجح الجملة $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,1)\,;\,(D\,;\,2)\}$ برهن أن النقط G , I , J في استقامية.

الحل :

نبرهن أن النقط G , I , J في استقامية.



لدينا : G مرجح الجملة $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,1)\,;\,(D\,;\,2)\}$

وعليه : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ إذن :

$$2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+2\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$$

$$4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}\right)+\left(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}\right)=\vec{0}$$

لكن I منتصف $[AD]$ وعليه : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

وكذلك J منتصف $(BC]$ وعليه : $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

ومنه : $4\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$ أي أن : $2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$

إذن G هي مرجح الجملة $\{(I\,;\,2)\,;\,(J\,;\,1)\}$

ومنه G نقطة من المستقيم $(I\,J)$

أي أن النقط G , I , J في استقامية.

1- مميزات المرجح :

تعريف 1 : (تذكير)

مرجح النقط $A_1 , A_2 , ... , A_n$ مرفقة بالمعاملات $\alpha_1 , \alpha_2 , ... , \alpha_n$ حيث:

$\alpha_1 + \alpha_2 +...+ \alpha_n \neq 0$ هي النقطة الوحيدة G التي تحقق:

$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

G تسمى أيضا مركز المسافات المتناسبة للجملة :

$$\{(A_1 , \alpha_1) ; (A_2 , \alpha_2) ; . . . ; (A_n , \alpha_n)\}$$

مثال 1:

إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

ومنهI مرجح الجملة $\{(A , 1) ; (B , 1) \}$

مثال 2:

إذا كان G مركز ثقل المثلث ABC أي $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A , 1) ; (B , 1) ; (C , 1)\}$

ملاحظة :

إذا كان: $\alpha_1 + \alpha_2 +...+ \alpha_n = 0$ فإن الجملة :

$\{(A_1, \alpha_1) , (A_2, \alpha_2) ,..., (A_n, \alpha_n)\}$ لا تقبل مرجحا .

مبرهنة 1:

1) إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A_1, \alpha_1) , (A_2, \alpha_2) ,..., (A_n, \alpha_n)\}$

فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+ \alpha_2\overrightarrow{MA_2}+ . . . +\alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha)\overrightarrow{MG}$$

2) إذا كان H مرجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$

وكان K مرجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$. $(\alpha + \beta \neq 0)$

فإن H مرجح الجملة $\{(K , \alpha + \beta) ; (C , \gamma)\}$

ملاحظة :

إذا كان الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ وكان G مرجح الجملة

$\left\{\left(A_1, \alpha_1\right) ; \left(A_2, \alpha_2\right) ; \left(A_n, \alpha_n\right)\right\}$ بحيث:

$A_n\left(x_n ; y_n\right), \ldots, A_2\left(x_2 ; y_2\right), A_1\left(x_1 ; y_1\right), G\left(x_G ; y_G\right)$

فإن المبرهنة (1)

$$\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}=\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\right)\overrightarrow{OG}$$

وهذا بوضع $M = O$ ومنه:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha_1\overrightarrow{OA_1}+\alpha_2\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{OA_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$$

وعليه :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \\ y_G=\dfrac{\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \end{cases}$$

وفي المستوى المركب :

من أجل : $A_n\left(Z_n\right) ; \ldots ; A_2\left(Z_2\right) ; A_1\left(Z_1\right) ; G\left(Z_G\right)$

لدينا :

$$Z_G=\frac{\alpha_1Z_1+\alpha_2Z_2+\ldots+\alpha_nZ_n}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$$

مثال : في المستوى المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ نعتبر النقط B , A ,

C التي لواحقها: $Z_1=2+3i$, $Z_2=-4i$, $Z_3=-3+i$ على الترتيب

احسب لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A, 2) ; (B, -1) ; (C, 1)\right\}$

الحل :

النقطة G تحقق $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ولدينا: $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2-1+1}$ ومنه: $Z_G=\dfrac{2Z_1-Z_2+Z_3}{2-1+1}$

إذن: $Z_G = \frac{2(2+3i)+4i-3+i}{2}$ ومنه: $Z_G = \frac{1}{2} + \frac{11}{2}i$

مبرهنة 2 :

لتكن A و B نقطتان متمايزتان و α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$.

- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ عندما تمسح α و β كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي المستقيم (AB) كاملا.
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta)\}$ عندما تمسح α و β كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وتكون من نفس الإشارة هي القطعة $[AB]$.

ملاحظة :

لكي نبرهن أن ثلاث نقط على استقامية يكفي أن نبرهن أن إحداهما هي مرجح الأخريتين.

مبرهنة 3: لتكن A,B,C ثلاث نقط متمايزة مثنى مثنى و ليست في استقامية و α و β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ عندما تمسح α و β و γ كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي كل المستوى (ABC)
- مجموعة مراجح الجملة $\{(A , \alpha) ; (B , \beta) ; (C , \gamma)\}$ عندما تمسح α و β و γ كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ و تكون من نفس الإشارة هي الجزء من المستوي المحدد بالمثلث ABC .

ملاحظة :

لكي نبرهن أن أربعة نقط من نفس المستوى يكفي أن نبرهن أن إحداهن مرجح النقط الأخرى.

2- التمثيل الوسيطي لمستقيم و لمستو :

فيمايلي الفضاء منسوب إلى معلم $\left(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم :

مبرهنة :

(D) مستقيم يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$. لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء.

تكون M نقطة من (D) إذا وفقط إذا حققت إحداثيي M

العلاقات التالية : $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي.

البرهان :

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

النقطة $M(x ; y ; z)$ هي نقطة من المستقيم (D) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$$

ومنه نحصل على : $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ من تساوي إحداثيات شعاعين

تعريف :

الجملة $\begin{cases} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{cases}$ تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل

النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$ و العدد الحقيقي t هو وسيط.

مثال 1:

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 3 ; -4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(4 ; -1 ; 3)$.

الحل :

تكون نقطة $M(x ; y ; z)$ من الفضاء نقطة من (D) إذا وفقط

إذا كان : $t \in \mathbb{R} , \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

ومنه $\begin{cases} x + 1 = 4t \\ y - 3 = -t \\ z + 4 = 3t \end{cases}$ و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -t + 3 \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

حيث : t وسيط حقيقي.

مثال 2 :

ماذا تمثل الجملة : $\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 4t - 1 \\ z = \frac{1}{2}t + 5 \end{cases}$

الحل :

هذه الجملة تمثل تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(5 ; -1 ; 5)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1 ; 4 ; \frac{1}{2}\right)$

ب- التمثيل الوسيطي لمستو :

مبرهنة :

M نقطة من المستوى (P) المزود بمعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ بحيث $A(\alpha_1 ; \beta ; \gamma)$ و $\vec{u}(a ; b ; c)$ و $\vec{u}(a' ; b' ; c')$

إذا وفقط إذا كانت إحداثياها $(x ; y ; z)$ تحقق الجملة :

$$\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$$

حيث t و t' حقيقيان.

البرهان :

تكون $M(x ; y ; z)$ نقطة من المستوى (P) إذا وفقط إذا وجد عددان

حقيقيان t و t' بحيث : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u'}$

و من تساوي احداثيات شعاعين نجد : $\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$

تعريف :

نقول أن الجملة $\begin{cases} x = at + a't' + \alpha \\ y = bt + b't' + \beta \\ z = ct + c't' + \gamma \end{cases}$ تشكل تمثيلا وسيطيا للمستوى

(p) الذي يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و شعاعي توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$ و

$\vec{v}(a' ; b' ; c')$ و t و t' وسيطين حقيقيين .

مثال :

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) المعين بالنقطة A(1 ; -3 ; 4) و بالشعاعين

$\vec{u}(2 ; -1 ; 5)$ و $\vec{v}(3 ; 2 ; 1)$

الحل :

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وعليه $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلم للمستوي (P) .

تكون النقطة M من الفضاء نقطة من (P) إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها $(x ; y ; z)$ الجملة :

$\begin{cases} x - 1 = 2t + 3t' \\ y + 3 = -t + 2t' \\ z - 4 = 5t + t' \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x = 2t + 3t' + 1 \\ y = -t + 2t' - 3 \\ z = 5t + t' + 4 \end{cases}$ ويشكل تمثيلا

وسيطيا للمستوي (P) .

3- التمثيل الديكارتي لمستقيم :

مبرهنة :

(P) مستقيم يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$. إذا كانت الأعداد a,b,c غير معدومة جميعا فإن نقطة M من الفضاء تنتمي إلى (D) إذا حققت إحداثياها ما يلي :

$$\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$$

البرهان :التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) هو $\begin{cases} x = at+\alpha \\ y = bt+\beta \\ z = ct+\gamma \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} x-\alpha = at \\ y-\beta = bt \\ z-\gamma = ct \end{cases}$ ومنه : $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}=t$

تعريف :

العبارة $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}$ تسمى تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(\alpha ; \beta ; \gamma)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a ; b ; c)$ وهذا إذا كانت الأعداد a وb وc غير معدومة جميعا.

إذا كان أحد الأعداد a,b,c معدوما فإن بسطه يكون معدوما أيضا.

مثال : اكتب تمثيلا ديكارتيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(-1 , 3 , 4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(3 ; 2 ; 4)$

الحل : التمثيل الديكارتي للمستقيم (D) هو : $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{4}$

4- التقاطع و التوازي في الفضاء لمستويين :

مبرهنة :

نعتبر المستويان (P) و (P') حيث :

$(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ و $(P) : ax + by + cz + d = 0$

يتوازى (P) و (P') إذا وفقط إذا وجد عدد حقيق k غير معدوم بحيث :

$a' = ka$ و $b = kb'$ و $c' = kc$

البرهان :

يتوازى (P) و (P') إذا وافقط إذا كان الشعاعان $\vec{n}(a;b;c)$ و $\vec{n'}(a';b';c')$ مرتبطان خطيا.

أي إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{n'} = k\vec{n}$.

وعليه : $a' = ka$ و $b' = kb$ و $c' = ka$

مثال 1: المستويان

$(P') : 4x - 2y + 8z = 0$ و $(P) : 2x - y + 4z - 5 = 0$

متوازيان لأن شعاعيهما الناظميان $\vec{n}(2 ; -1 ; 4)$ و $n'(4 ; -2 ; 8)$ مرتبطان خطيا.

مثال2 : المستويان : $(P) : x - y + 3z + 4 = 0$

و $(P') : 3x + y - 4z + 2 = 0$

غير متوازيان لأن الشعاعين $\vec{n}(1 ; -1 ; 3)$ و $\vec{n}'(3 ; 1 ; -4)$

غير مرتبطان خطيا.

ملاحظة : المستقيم في الفضاء ليس له معادلة ديكارتية بل له تمثيل ديكارتي كما سبق.

تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة.

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم $(O\ ;\ \vec{k})$ هو : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$ ☐

2) التمثيلان الآتيان هما لنفس المستقيم

$\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = \lambda + 2 \\ z = -\lambda \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ ☐

3) المعادلة الديكارتية لمستقيم في الفضاء تكون من الشكل : ☐

$$ax + by + cz + d = 0$$

4) كل معادلة من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$ حيث a,b,c,d أعداد حقيقية هي معادلة لمستو. ☐

5) التمثيل الوسيطي الآتي : $\begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = u + 2 \\ z = \lambda \end{cases}$ هو لمستو ☐

6) الجملة الآتية تمثل مستقيما : $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 2x + y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$ ☐

7) المعادلة $x - y + 4 = 0$ في الفضاء هي معادلة لمستقيم. ☐

8) المعدلة $4x - y + 5 = 0$ هي معادلة مستو في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد متجانس حيث شعاعه الناظمي $\vec{n}(4; -1\ ;\ 0)$ ☐

9) النقط A,B,C حيث : $2\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ في استقامية. ☐

10) إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 1)\ ,\ (B\ ;\ -2)\ ,\ (c\ ;\ 3)\}$ وكانت

K مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -2)\}$ فإن G مرجح الجملة

. $\{(K ; -1) ; (C ; 3)\}$.

التمرين 2 .

عين قيمة العدد الحقيقي x بحيث تكون النقطة C حيث : $\overrightarrow{CD} \frac{-1}{2} = \overrightarrow{CA}$ مرجح النقطتان

D وA المرفقتان على الترتيب

بالمعاملين $x - 1$ وx على الترتيب.

التمرين 3 .

ABC مثلث قائم في A . M نقطة حيث : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

بين أن M مرجح للنقطتين C , B المرفقتين بالمعاملين α و β حيث يطلب تعيينهما. استنتج أن M نقطة من (BC) .

التمرين 4 .

نعتبر النقطتان $A(1 ; -3 ; 2)$, $B(-2 ; 1 ; 4)$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2- استنتج أن (AB) هو تقاطع مستويين يطلب تعيينهما بمعادلتيهما.

التمرين 5 .

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس تعطى النقط :

$A(-4 ; 2 ; 1)$,$B(-1 ; 5 ; 1)$,$C(-1 ; -2 ; 1)$, $D(0 ; 1 ; 3)$

1- هل النقط A,B,C في استقامية ؟

2- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى الذي يشمل النقط A,B,C

3- هل D نقطة من المستوى (ABC) ؟

4- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (DAB) .

التمرين 6 .

إليك التمثيل الوسيطي لمستو (P) :

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu - 1 \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = \lambda - 3\mu + 2 \end{cases}$$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P') الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 2 ; 5)$ ويوازي (P) .

التمرين 7 .

إليك النقط $L(1 ; -1 ; 3) , T(1 ; 2 ; -3) , S(-2 ; 1 ; 3)$

1- اكتب التمثيل الوسيطي للمستوي (P) الذي يشمل L ويحتوي على المستقيم (ST) ثم استنتج معادلته.

2- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (ST) .

التمرين 8 .

إليك التمثيلين الوسيطيين للمستوى (P) و المستقيم (D)

$$(D) : \begin{cases} x = \lambda' \\ y = -2\lambda' + 1 \\ z = -\lambda' \end{cases} \qquad (P) : \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = \lambda - 2\mu \end{cases}$$

عين نقط تقاطع (P) و (D) .

التمرين 9 .

تعطى النقط $A(1 , 1 , -1)$; $B(-1 , 1 , -1)$; $C(0 , -1 , 1)$; $D(-1 , 0 , 1)$; و الشعاع $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويوازي $\vec{u}$.

2) اكتب المعادلة الديكارتية للمستوى (BCD) .

3) عين نقط تقاطع (Δ) و (BCD) .

التمرين 10 .

(D) و (D') مستقيمان معرفان بتمثيلهما الوسيطيان في معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$

$$(D):\begin{cases}x=\lambda+1\\ y=2\lambda-2\\ z=-\lambda+3\end{cases}\qquad (D'):\begin{cases}x=3\lambda'+3\\ y=-\lambda'-5\\ z=\lambda'+5\end{cases}$$

1- بين أن (D) و (D') متقاطعان .

2- عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (D) و (D') .

التمرين 11 .

إليك المستقيم(D) و المستقيم (Δ) حيث :

$$(\Delta):\begin{cases}x=t\\ y=t-1\\ z=-t\end{cases}\qquad (D):\begin{cases}x=-\lambda+1\\ y=2\lambda\\ z=\lambda+1\end{cases}$$

A نقطة من (Δ) فاصلتها α .

1- بين أن (D) و (Δ) لا يتقاطعان.

2- بين أن (D) و (Δ) من مستويين مختلفين.

3- عين بدلالة α معادلة للمستوى (P_α) الذي يشمل المستقيم (D) و النقطة A .

4- هل يمكن تعيين α بحيث يكون (p_α) مارا من O

5- هل يمكن تعيين α بحيث يكون (p_α) موازيا محور الفواصل.

التمرين 12 .

ليكن ABCDEFGH مكعب

وليكن (P) المستوي الذي

معادلته : $2x+6y-z+5=0$

1- اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمات (AB) و(AD) و (AE)

2- عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (BCG) .

3- عين نقط تقاطع (BCG) و(P) .

التمرين 13 .

عين مجموعة النقط M(x ; y ; z) لتقاطع المستويين (P) و (P')

حيث : $(p) : x - y + z - 4 = 0$, $(P') : x + 2y - 3z = 0$

التمرين 14 .

(P) مستو معادلته : $-x + y + z - 4 = 0$.

(P') مستو يشمل النقط $A(1 ; 0 ; 1)$, $B(0 ; 1 ; 1)$, $C(1 ; 1 ; 0)$.

1- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوى (P') .

2- عين نقط تقاطع (P) و (P') .

الحــــلـــــول

التمرين 1 .

1) √ 2) × 3) × 4) × 5) √

6) √ 7) × 8) √ 9) √ 10) √ .

التمرين 2 .

تعيين قيمة x :

لدينا $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ وعليه : $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

وبما أن C مرجح النقطتان A وD المرفقتين بالمعاملين x و $x - 1$ على الترتيب فإن :

$$x . \overrightarrow{CA} + (x - 1)\overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

ومنه $\begin{cases} x = 2 \\ x - 1 = 1 \end{cases}$ وعليه : $x = 2$.

التمرين 3 .

1- تبيان أن M مرجح C , B .

لدينا : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ أي: $5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$$5\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} - 2\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) - 3\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) = \vec{0}$$

$$-5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MA} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

ومنه : $2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

إذن M مرجح النقطتان B وC المرفقتان بالمعاملين 2 و 3

وعليه $\alpha = 2$ و $\beta = 3$.

نعلم أنه إذا كانت M مرجح B وC فإن M نقطة من (BC) .

التمرين 4 .

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) : $\overrightarrow{AB}(-3 ; 4 ; 2)$. لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء. تكون M نقطة من (AB) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ حيث λ عدد حقيقي وعليه:

$$\begin{cases} x - 1 = -3\lambda \\ y + 3 = 4\lambda \\ z - 2 = 2\lambda \end{cases}$$

أي أن :

$$\begin{cases} x = -3\lambda + 1 \\ y = 4\lambda - 3 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

2) تبيان أن (AB) هو تقاطع مستويين :

لدينا :

$$\begin{cases} x = -3\lambda + 1 \;...\;(1) \\ y = 4\lambda - 3 \;...\;(2) \\ z = 2\lambda + 2 \;...\;(3) \end{cases}$$

من (1) : $\lambda = \frac{-1}{3}(x-1)$ وبالتعويض في (2) نجد :

$y = \frac{-4}{3}(x-1) - 3$ وعليه : $3y = -4(x-1) - 9$

إذن : $3y + 4x - 5 = 0$ وبالتعويض في (3) : $z = \frac{-2}{3}(x-1) + 2$

ومنه $3y = -2x + 8$ ومنه : $3y + 2x - 8 = 0$

وبالتالي :
$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ 4x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

وهي الجملة المكونة من تقاطع مستويين معادلتيهما :

$4x + 3y - 5 = 0$ و $2x + 3y - 8 = 0$.

التمرين 5 .

1- البحث عن استقامية النقط A ,B , C :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,3\,;\,0)$, $\overrightarrow{AC}\,(3\,,\,-4\,;\,0)$

نلاحظ أن إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متناسبة ومنه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل فهما غير متوازيان و بالتالي النقط A , B , C ليست في استقامية.

2- التمثيل الوسيطي للمستوي (P) :

بما أن A , B , C ليست في إستقامية فهي تكون معلما : $\left(A\,,\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\right)$ للمستوي (ABC) أي (P) .

من أجل كل نقطة $M(x\,;\,y\,;\,z)$ من (P) لدينا : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

ومنه :
$$\begin{cases} x + 4 = 3\lambda + 3\mu \\ y - 2 = 3\lambda - 4\mu \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$
أي:
$$\begin{cases} x = 3\lambda + 3\mu - 4 \\ y = 3\lambda - 4\mu + 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

3- البحث عن كون D تنتمي إلى (ABC) :

لدينا :
$$\begin{cases} x = 3\lambda + 3\mu - 4 \\ y = 3\lambda - 4\mu + 2 \\ z = 1 \end{cases}$$
وعليه :

إذا كانت D تنتمي إلى (ABC) فإن :

$$\begin{cases} 0 = 3\lambda + 3\mu - 4 \\ 1 = 3\lambda - 4\mu + 2 \\ 3 = 1 \end{cases}$$ وهذا مستحيل .

ومنه D ليست نقطة من (ABC) .

4- التمثيل الوسيطي للمستوي (DAB) .

بما أن D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) فإن $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ ليس لهما نفس الحامل ومنه $\left(D , \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{DB}\right)$ معلم للمستوي (DAB) .

لتكن M نقطة من (DAB) حيث $M(x ; y ; z)$

لدينا : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{DB}(-1 ; 4 ; -2) , \overrightarrow{DA}(-4 ; 1 ; -2)$

وعليه : $\begin{cases} x + 4 = -4\alpha - \beta \\ y - 2 = \alpha + 4\beta \\ z - 1 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} x = -4\alpha - \beta - 4 \\ y = \alpha + 4\beta + 2 \\ z = -2\alpha - 2\beta + 1 \end{cases}$

و هو التمثيل الوسيطي للمستوي (DAB)

التمرين 6 .

التمثيل الوسيطي للمستوي (p'):

بما أن (p') يوازي (P) فإن التمثيل الوسيطي للمستوي (p') يكون من الشكل :

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu + x_0 \\ y = -2\lambda + \mu + y_0 \\ z = \lambda - 3\mu + z_0 \end{cases}$$

لكن A تنتمي إلى (p') ومنه :

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu - 1 \\ y = -2\lambda + \mu + 2 \\ z = \lambda - 3\mu + 5 \end{cases}$$ هو التمثيل الوسيطي للمستوي (p')

التمرين 7 .

1- كتابة معادلة (P) :

المستوي (P) يحتوي على ثلاث نقط هي T , S , L .

$$\overrightarrow{LT}(0\,;3\,;-6)\ ,\ \overrightarrow{LS}(-3\,;2\,;0)$$

الشعاعان $\overrightarrow{LS}$ و $\overrightarrow{LT}$ ليس لهما نفس الحامل.

وعليه $\left(L\ ,\ \overrightarrow{LS}\ ,\ \overrightarrow{LT}\right)$ معلم للمستوي (P) .

من أجل كل نقطة $M(x\,;y\,;z)$ من (D) لدينا :

$$\overrightarrow{LM} = \alpha\overrightarrow{LS} + \beta\overrightarrow{LT}$$

وعليه : $\begin{cases} x-1=-3\alpha \\ y+1=2\alpha+3\beta \\ z-3=-6\beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=-3\alpha+1 \\ y=2\alpha+3\beta-1 \\ z=-6\beta+3 \end{cases}$

استنتاج المعادلة الديكارتية.

$$\begin{cases} x=-3\alpha+1\ldots(1) \\ y=2\alpha+3\beta-1\ldots(2) \\ z=-6\beta+3\ldots(3) \end{cases}$$

من (1) : $\alpha=\frac{1}{3}(1-x)$ و من (3) : $\beta=\frac{1}{6}(3-z)$. بتعويض α و β بقيمتيهما

في (2) نجد : $y = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}z\right)-1$

أي : $y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}z-1$

ومنه : $\frac{2}{3}x+y+\frac{1}{2}z-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1=0$

أي: $\frac{2}{3}x+y+\frac{1}{2}z-\frac{7}{6}=0$ إذن : $\frac{4x+6y+3z-7}{6}=0$

وعليه معادلة المستوي هي : $4x+6y+3z-7=0$

2- التمثيل الوسيطي للمستقيم (ST) :

لدينا $\overrightarrow{ST}\ (3\ ;\ 1\ ;\ -6)$. لتكن M(*x* ; y ; z) نقطة من (ST) أي:

$\overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{ST}$ حيث: $\overrightarrow{SM}\ (x + 2 , y - 1 , z - 3)$

ومنه : $\begin{cases} x+2 = 3\lambda \\ y-1 = \lambda \\ z-3 = -6\lambda \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = \lambda + 1 \\ z = -6\lambda + 3 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (DT)

التمرين 8 .

تعيين نقط تقاطع (D) و (Δ):

نحل الجملة : $\begin{cases} \lambda' = -1 + \lambda - \mu \\ -2\lambda' + 1 = 2 - \lambda + \mu \\ -\lambda' = \lambda - 2\mu \end{cases}$

وعليه : $\begin{cases} \lambda' - \lambda + \mu + 1 = 0 & \ldots(1) \\ -2\lambda' + \lambda - \mu - 1 = 0 & \ldots(2) \\ -\lambda' - \lambda + 2\mu = 0 & \ldots(3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $-\lambda' = 0$ ومنه $\lambda' = 0$

وعليه : $\begin{cases} -\lambda + \mu + 1 = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$

بالطرح نجد : $-\mu + 1 = 0$ ومنه : $\mu = 1$

وعليه : $\lambda = 2$ أي أن : $z = 0 , y = 1 , x = 0$

ومنه نقطة التقاطع هي : I(0 ; 1 ; 0)

التمرين 9 .

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

لتكن M(*x* ; y ; z) نقطة من الفضاء

تكون M من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$

وعليه : $\begin{cases} x - 1 = 2\lambda \\ y - 1 = -\lambda \\ z + 1 = \lambda \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

2) المعادلة الديكارتية للمستوى (BCD) :

وهي من الشكل : $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

بماأن B , C , D نقط منه فإن : $\begin{cases} -\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0 \ldots (1) \\ -\beta + \gamma + \delta = 0 \ldots (2) \\ -\alpha + \gamma + \delta = 0 \ldots (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد : $-\alpha + 2\delta = 0$ ومنه : $\alpha = 2\delta$

بطرح (3) من (2) نجد : $-\beta + \alpha = 0$ ومنه : $\beta = \alpha$

إذن : $\beta = 2\delta$ بالتعويض في (1) نجد: $-2\delta + 2\delta - \gamma + \delta = 0$

وعليه: $\gamma = \delta$.

إذن معادلة المستوي هي: $2\delta x + 2\delta y + \delta z + \delta = 0$

أي : $\delta(2x + 2y + z + 1)$ ومنه : $2x + 2y + z + 1 = 0$

هي معادلة (BCD) .

3- تعيين نقط تقاطع (Δ) و (BCD) :

نحل الجملة : $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -\lambda + 1 \\ 2x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

وعليه : $2(2\lambda + 1) + 2(-\lambda + 1) + \lambda - 1 + 1 = 0$

أي: $3\lambda + 4 = 0$ وعليه : $\lambda = \frac{-4}{3}$

إذن : $x = \frac{-8}{3} + 1 = \frac{-5}{3}$, $y = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$, $z = \frac{-4}{3} - 1 = \frac{-7}{3}$

ومنه نقطة التقاطع هي : $J\left(\frac{-5}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\ ;\ \frac{-7}{3}\right)$

التمرين 10 .

1) تبيان أن (D) و (D') متقاطعان. نحل الجملة :

$$\begin{cases}\lambda + 1 = 3\lambda' + 3\\ 2\lambda - 2 = -\lambda' - 5\\ -\lambda + 3 = \lambda' + 5\end{cases}$$ وعليه : $$\begin{cases}\lambda = 3\lambda' + 2\\ 6\lambda' + 4 - 2 = -\lambda' - 5\\ -3\lambda' - 2 + 3 = \lambda' + 5\end{cases}$$

أي: $$\begin{cases}\lambda = 3\lambda' + 2\\ 7\lambda' = -7\\ -4\lambda' = 4\end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases}\lambda' = -1\\ \lambda = -1\end{cases}$$ وعليه : $$\begin{cases}x = 0\\ y = -4\\ z = 4\end{cases}$$

إذن (D) و (D') يتقاطعان في النقطة $w(0\ ;\ -4\ ;\ 4)$

2- المستوي (P) يشمل (D) و (D') :

وعليه إذا كان $\vec{n}(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن $\vec{n}$

عمودي على شعاعي توجيهي (D) و (D')

حيث: $\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $\vec{v}(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ هما هاذين الشعاعين.

وعليه : $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$

إذن : $$\begin{cases}\alpha + 2\beta - \gamma = 0\\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0\end{cases}$$ بالجمع نجد : $4\alpha + \beta = 0$

أي: $\beta = -4\alpha$ وعليه: $\alpha - 8\alpha - \gamma = 0$ ومنه : $\gamma = -7\alpha$

بوضع $\alpha = 1$ نجد : $\beta = -4$, $\gamma = -7$

ومنه معادلة المستوي هي من الشكل : $x - 4y - 7z + \delta = 0$

وبما أن w تنتمي إلى هذا المستوي فإن : $0 + 16 - 28 + \delta = 0$

إذن : $\delta = 12$ ومنه معادلة المستوي هي : $x - 4y - 7z + 12 = 0$

التمرين 11 .

1- نبين أن (D) و (Δ) لا يتقاطعان.

نحل الجملة :
$$\begin{cases} \alpha = -\lambda + 1 \ldots (1) \\ \alpha - 1 = 2\lambda \ldots (2) \\ -\alpha = \lambda + 1 \ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد : $-1 = 3\lambda + 1$ ومنه $\lambda = \frac{-2}{3}$

بالتعويض في كل المعادلات نجد :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{3} \\ \alpha - 1 = \frac{-4}{3} \\ -\alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$ إذن : $$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{3} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases}$$ و هذا تناقض.

ومنه (D) و (Δ) لا يتقاطعان.

2- نبين أن (D) و (Δ) من مستويين مختلفين :

شعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(-1;2;1)$ وشعاع توجيه (Δ) هو $\vec{v}(1;1;-1)$. الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليس لهما نفس الحامل لأن إحداثياتهم ليست متناسبة وكذلك المستقيمان (D) و (Δ) غير متوازيان

ومنه (D) و (Δ) من مستويين مختلفين .

3- تعيين معادلة (p_α) :

A نقطة من (Δ) فاصلتها α ومنه : $A(\alpha;\alpha-1;-\alpha)$.

لتكن Bنقطة من (D) حيث B(1 ; 0 ; 1) .

شعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(-1;2;1)$

بما أن (p_α) يشمل (D) و (A) فإن (p_α) يقبل كمعلم :

$\left(B;\vec{u};\overrightarrow{BA}\right)$, $\overrightarrow{BA}\,(\alpha-1;\alpha-1;-\alpha-1)$ ومنه من أجل كل نقطة M(*x* ; y z) من (p_α) فإن : $\overrightarrow{BM} = \lambda\vec{u} + \mu\overrightarrow{BA}$

وعليه :
$$\begin{cases} x-1 = -\lambda + \mu(\alpha-1) & (1)\ldots \\ y-0 = 2\lambda + \mu(\alpha-1) & (2)\ldots \\ z-1 = \lambda - \mu(\alpha+1) & (3)\ldots \end{cases}$$

بطرح (2) من (1) نجد : $x-1-y=-3\lambda$

ومنه $\lambda = -\frac{1}{3}(x-y-1)$

بجمع (1) و (3) نجد : $x-1+z-1=-2\mu$

ومنه $\mu = -\frac{1}{2}(x+z-2)$ بالتعويض في (1) نجد :

$$x-1=\frac{1}{3}(x-y-1)-\frac{1}{2}(x+z-2)(\alpha-1)$$

$$6(x-1)=2(x-y-1)-3(x+z-2)(\alpha-1)$$

$$6x-6=2x-2y-2-3(\alpha-1)x-3(\alpha-1)z+6(\alpha-1)$$

$$4x+(3)(\alpha-1)x+2y+3(\alpha-1)z+2-6\alpha+6-6=0$$

وعليه : $(3\alpha+1)x+2y+3(\alpha-1)z+2-6\alpha=0$

وهي معادلة ديكارتية للمستوي (p_α).

4- تعيين α بحيث يمر (p_α) من المبدأ :

أي $2-6\alpha=0$ وعليه : $\alpha=\frac{1}{3}$

5- يكون (p_α) موازيا لحامل محور الفواصل $(O;\vec{i})$ إذا كانت معادلته من الشكل : $by+cz+d=0$

ومنه : $3\alpha+1=0$ وعليه : $\alpha=-\frac{1}{3}$

التمرين 12 .

1) التمثيلات الوسيطية :

$$(AB):\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad (AD):\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}, \quad (AE):\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

2) التمثيل الوسيطي للمستوي (BCG) :

المستوي (BCG) يشمل النقطة B(1 ; 0 ; 0)

و الشعاعين $\overrightarrow{BC}(0;1;0)$, $\overrightarrow{BF}(0;0;1)$

ومنه $\left(B , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BF}\right)$ معلم لهذا المستوي وعليه من أجل كل نقطة $M\left(x;y;z\right)$ من (BCG) : $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BC} + M\overrightarrow{BF}$

إذن التمثيل الوسيطي للمستوي (BCG) هو : $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

3) تعيين نقط تقاطع (P) و (BCG) :

نحل الجملة : $\begin{cases} 2x + 6y - z + 5 = 0 \\ x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

وعليه : 2 + 6y – z + 5 = 0 وعليه :

6y – z + 7=0

وهي معادلة مستو يوازي حامل محور الفواصل $(O , \vec{i})$.

التمرين 13 .

نحل الجملة: $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \dots (1) \\ x + 2y - 3z = 0 \dots (2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد -3y + 4z – 4 = 0

ومنه : $y = \frac{1}{3}(4z - 4)$ أي $y = \frac{4}{3}z - \frac{4}{3}$

بالتعويض في (1) نجد : $x - \frac{4}{3}z + \frac{4}{3} + z - 4 = 0$

وعليه : $3x - 4z + 4 + 3z - 12 = 0$

إذن : $3x - z - 8 = 0$ وبالتالي : $x = \frac{1}{3}z + 8$

وعليه : $\begin{cases} x = \frac{1}{3}z + 8 \\ y = \frac{4}{3}z - \frac{4}{3} \\ z = z \end{cases}$ بوضع z = t نجد : $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t + 8 \\ y = \frac{4}{3}t - \frac{4}{3} \\ z = t \end{cases}$

ومنه يتقاطع (P) و (p') وفق المستقيم الذي يشمل النقطة $I\left(8 , \frac{-4}{3} , 0\right)$ و شعاع

توجيهه $\vec{u}\left(\frac{1}{3} ; \frac{4}{3} ; 1\right)$

التمرين 14 .

1- التمثيل الوسيطي للمستوي (p') :

$\overrightarrow{AB}(-1 ; 1 ; 0)$, $\overrightarrow{AC}(0 ; 1 ; -1)$ وعليه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل ومنه $\left(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC}\right)$ معلم للمستوي (p')

من أجل كل نقطة $M(x ; y ; z)$ من (P') فإن : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

وعليه : $\begin{cases} x - 1 = -\alpha \\ y - 0 = \alpha + \beta \\ z - 1 = -\beta \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\beta + 1 \end{cases}$

وهو التمثيل الوسيطي للمستوي (P').

2- تعيين نقط تقاطع (P) و (P') :

نحل الجملة : $\begin{cases} -x + y + z - 4 = 0 \ldots (1) \\ x = -\alpha + 1 \ldots (2) \\ y = \alpha + \beta \ldots (3) \\ z = -\beta + 1 \ldots (4) \end{cases}$

نعوض كل من x و y و z من (2) و (3) و (4) بقيمها في (1) فنجد :

$$-(-\alpha+1)+(\alpha+\beta)-\beta+1-4=0$$

إذن : $2\alpha-1+\beta-\beta+1-4=0$ أي: $2\alpha-4=0$

وعليه : $\alpha=2$ ومنه : $\begin{cases} x=-2+1 \\ y=2+\beta \\ z=-\beta+1 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=-\beta+1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=o\,.\,\beta-1 \\ y=\beta+2 \\ z=-\beta+1 \end{cases}$

وهي التمثيل الوسيطي لمستقيم (Δ) يشمل النقط C(-1 ; 2 ; 1) وشعاع توجيهه

$$\vec{u}(0\,;\,1\,;\,-1)$$

إذن : (P) و (P') يتقاطعان وفق (Δ).