قوانين الاحتمالات المتقطعة و المستمرة

الكفاءات المستهدفة :

- 1 - حل مسائل في الاحتمالات تؤول إلى توظيف قانون التوزيعات المنتظمة .
- 2 - التعرف على تجربة لبرنولي.
- 3.- إيجاد قانون ثنائي الحد لتجربة تتعلق به
- 4 - استعمال نتائج محاكاة من أجل قياس تلاؤم سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي ثم رفض أو قبول نموذج احتمالي
- 5 -. حساب قانون احتمال متغير عشوائي مستمر ثم حساب الأمل الرياضي، التباين ، الانحراف المعياري له و حل تمارين لتوظيفه فيها

تصميم الدرس

أنشطة

I - قوانين الاحتمالات المتقطعة :

II - التلاؤم مع قانون احتمال متقطع :

III - قوانين الاحتمالات المستمرة :

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

تمـارين و مشكلات

الحـلـ ـ ـ ـ ـ ـو ل

أنشطة

النشاط :

يقوم لاعب بإلقاء حجرنرد غير مزيف مرة حيث أنه يكون رابحا إذا ظهر الرقم 1 أو الرقم 4 .

ليكن X التغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت نتيجة الرمي هي 1 أو4 ، و يأخذ القيمة 0 إذا كانت نتيجة الرمي هي 2 أو 3 أو 5 أو 6.

1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2) مثل بيانيا قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X .

الحل :

1) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X : قيم X هي: 1 ، 0

ليكن p_X قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X فيكون لدينا :

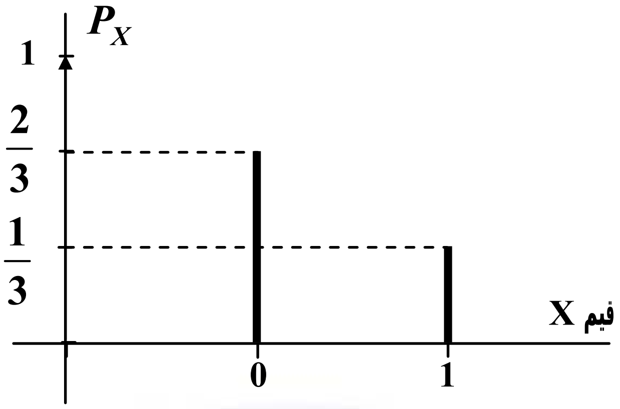
احتمال ظهور الرقمين 1 أو 4 هو : $p_X(1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

احتمال أن يظهر أحد الأرقام : 2 ، 3 ، 5 ، 6 هو : $p_X(0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

و عليه إليك قانون الاحتمال في الجدول الآتي :

قيم المتغير العشوائي X	1	0
الاحتمال p_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2) التمثيل البياني لقانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :



4) حساب كل من $E(X)$ و $\mathrm{V}(X)$ و $\sigma(X)$:

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{V}(X) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27}$$

و منه : $\mathrm{V}(X) = \frac{2}{9}$

و بالتالي: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

إذن : $\sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

I - قوانين الاحتمالات المتقطعة :

1 – قانون التوزيع المنتظم :

ليكن X المتغير العشوائي الذي قيمه : $x_1 \ , \ x_2 \ , \ ..., x_n$ و ليكن p_X قانون الاحتمال المعرف على مجموعة قيم المتغير العشوائي كما يلي :

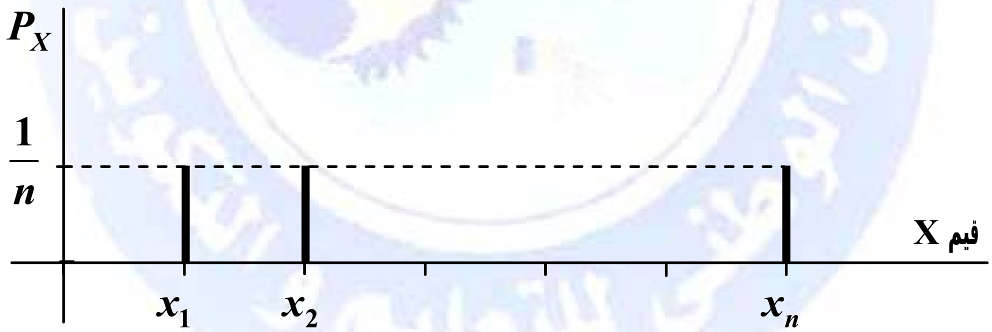
$$p_X(x_1) = p_X(x_2) = ... = p_X(x_n) = \frac{1}{n}$$

هذا القانون يسمى قانون التوزيع المنتظم و نقول أن المتغير العشوائي X يتبع قانون توزيع منتظم .

و هو موضح في الجدول الآتي :

قيم X	x_1	x_2	...	x_n
الاحتمال p_X	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

و يكون تمثيله كما يلي :



مثال :

نرمي زهرة نرد مرة واحدة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عدد زوجي الرقم 4 و بكل عدد فردي الرقم 3 .

اكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

الحل :

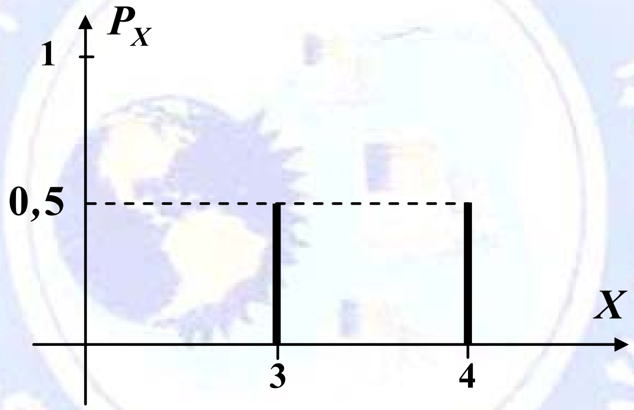
قيم المتغير العشوائي X هي : 4 ، 3

احتمال الحصول على عدد زوجي هو $\frac{3}{6}$ أي $\frac{1}{2}$ و احتمال الحصول على عدد فردي هو $\frac{3}{6}$ أي $\frac{1}{2}$

إذن : $p_X(3)=\frac{1}{2}$ و $p_X(4)=\frac{1}{2}$

قيم X	3	4
الاحتمال p_X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و هو قانون منتظم و تمثيله كما يلي :



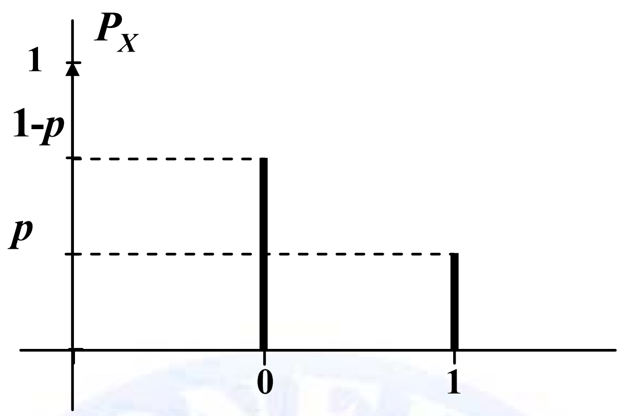
2 – قانون برنولي :

تعريف :

p عدد حقيقي حيث : $0<p<1$.كل تجربة لها مخرجين فقط احتمالهما p و $1-p$ عل الترتيب تسمى تجربة برنولي ذات الوسيط p . و المتغير العشوائي X في هذه التجربة يأخذ قيمة 1 في حالة نجاح التجربة و القيمة 0 في حالة رسوبها و نسميه المتغير العشوائي ذو الوسيط p لبرنولي و القانون p_X للمتغير العشوائي X يسمى قانون برنولي ذو الوسيط p و يعرف كما يلي :

قيم X	1	0
p_X	p	$1-p$

و يكون تمثيله كما يلي :



مثال :

قطعة نقود مزيفة تحمل A في الوجه و B في الوجه الآخر بحيث عند رمي القطعة مرة واحدة

لدينا : $p(B)=0,3$

نعتبر المتغير العشوائي X الذي :

يرفق بالوجه B العدد1 و بالوجه A العدد 0 .

أكتب قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X .

ماذا نسمي X و p_X . مثل p_X بيانيا .

الحل :

لدينا : $p(B)=0,3$ و عليه : $p(A)=1-0,3$ لأن الحادثتان B و A عكسيتان .

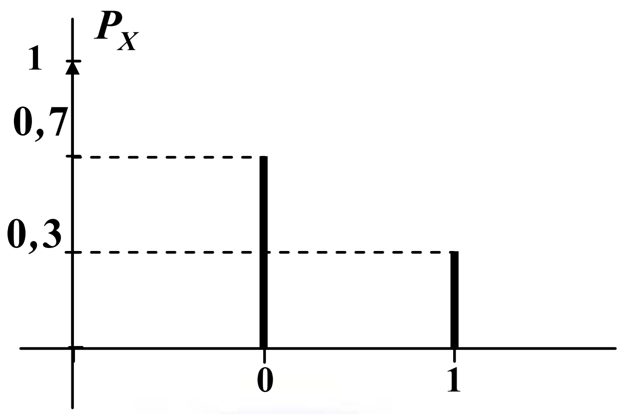
و منه p_X يعرف بالجدول :

قيم X	1	0
p_X	$0,3$	$0,7$

X : يسمى المتغير العشوائي ذو الوسيط $0,3$ لبرنولي

p_X : يسمى قانون برنولي ذو الوسيط $0,3$

التمثيل البياني :



مبرهنة :

ليكن X المتغير العشوائي ذو الوسيط p لبرنولي .

- الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 1.p + 0.(1-p) = p$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p(1-p)^2 + (1-p)(0-p)^2 = p(1-p)$$

في المثال السابق : $E(X) = 0,3$

و منه : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$

3 – قانون ثنائي الحد :

نكرر تجربة برنولي ذات الوسيط n, p مرة $(n \geq 1)$ في نفس الظروف المستقلة عن بعضها .

يعرف قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد النجاحات خلال n تجربة :

كما يلي : $p_X(k) = C_n^k . p^k .(1-p)^{n-k}$

من أجل : $k \in \{0 \ , \ 1 \ , ..., n\}$

- الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p تعطي على الترتيب كما يلي : $E(X) = np$ و

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = np(1-p) \text{ و } \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}$$

مثال :

قطعة نقود متوازنة تحمل الحرف A في وجه و الحرف B في وجه .

نقذف هذه القطعة 8 مرات متتابعة و نراقب الوجه العلوي الظاهر في كل مرة، علما أن الحصول على الوجه B يكسب صاحبه 100 Da

ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد النجاحات

ما هو احتمال كسب 500 Da .

- احسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$

الحل :

احتمال كسب 500 دج هو احتمال ظهور الوجه B : 5 مرات و بما أن القطعة متوازنة فإن احتمال ظهور كل من الوجهين A و B مساويا إلى $0,5$. إن هذه التجربة تتبع قانون ثنائي الحد للوسيطين 8 و $0,5$

$$p_X(5) = C_8^5.(0,5)^5.(0,5)^{8-5}$$

$$= \frac{8!}{(8-5)!.5!} \times (0,5)^5.(0,5)^3$$

$$= 56.0,00390625 = 0,21875$$

$$p_X(5) = 0,21875$$

$$E(X) = n.p = 8.0,5 = 4$$

$$V(X) = np(1-p) = 8 \times 0,5(1-0,5) = 4 \times 0,5 = 2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} \simeq 1,44$$

II - التلاؤم مع قانون احتمال متقطع :

1 – قياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة و نموذج احتمالي

لتكن السلسلة الإحصائية $\left(x_i\ ,\ n_i\right)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ ذات المقياس n .

p نموذج احتمالي قابل للتعبير عنها .

لقياس التلاؤم بين النموذج p و هذه السلسلة المشاهدة ، نقارن بين

التوترات f_i $\left(f_i=\dfrac{n!}{n}\right)$ من أجل $i\in\{1,\dots,k\}$ مع الاحتمالات p_i الذي يعطيها

النموذج p للقيمة x_i

تعريف :

المؤشر d^2_{obs} الذي يستعمل لقياس التلاؤم بين سلسلة مشاهدة $\left(x_i\ ,\ n_i\right)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ و

نموذج احتمالي متقطع و متساوي الاحتمالات حيث : $p_i=\dfrac{1}{k}$ من أجل $i\in\{1,\dots,k\}$

هو مجموع مربعات المسافات بين التواترات $\left(f_i\right)_{i\in\{1,\dots,k\}}$

و الاحتمالات : $\left(p_i\right)_{i\in\{1,\dots,k\}}$

$$d^2_{obs}=\left(f_1-p_1\right)^2+\left(f_2-p_2\right)^2+\dots+\left(f_k-p_k\right)^2$$

ملاحظة :

المؤشر d^2_{obs} يستعمل في حالة كون النموذج الاحتمالي متقطع و متساوي الاحتمالات .

2- عتبة رفض نموذج احتمالي :

يقبل النموذج P إذا كان d^2_{obs} أصغر بقدر كاف . أي إذا كان أصغر من أو يساوي عتبة محددة

و هي عبارة عن عدد يعطى أو يعين و يرفض النموذج في الحالة المعاكسة .

و عادة تعين العتبة باستعمال المحاكاة كما يلي :

نحاكي السلسلة الإحصائية المشاهدة ذات المقياس n باستعمال النموذج p نحسب بعد ذلك

المؤشر d^2 باستعمال السلسلة الجديدة ، لكن هذه القيمة تتأثر بتذبذب العينات أي أنه لو نقوم

بمحاكاة جديدة نجد قيمة أخرى للمؤشر d^2 و هذا يعني أن قيم هذا المؤشر تتغير بتغير السلسلة ، لهذا نقوم عمليا بتكرار المحاكاة عدد كبير من المرات و ليكن N و نحسب d^2 من أجل كل سلسلة .

- نتحصل من الخطوات السابقة على سلسلة من القيم d^2 مقاسها N نلخص هذه الأخيرة بالعشيرات .

نختار كعينة L العشير التاسع D_9 و منه ينتج :

- إذا كان $d_{obs}^2 \leq L$ فإن النموذج p مقبول .
- إذا كان $d_{obs}^2 > L$ فإن النموذج p مرفوض .

ملاحظة :

إن رفض نموذج احتمالي p و فق القاعدة السابقة يحمل مجازفة بالخطأ ذلك أننا قررنا القبول بهذا النموذج إذا كانت 90% من قيم d^2 أصغر أو تساوي العدد L و 10% من قيم d^2 أكبر من L

لهذا نقول عند رفض النموذج أننا رفضناه بمجازفة بالخطأ قدرها 10%

مثال :

قطعة نقدية تحمل الرقم 1 في وجه و الرقم 2 في الوجه الآخر صرح صاحب القطعة النقدية بأن القطعة غير مزورة ، غير أن صديقه محمد أراد أن يتأكد من ذلك .

1 – ما هو قانون الاحتمال الذي ينمذج تصريح صاحب القطعة النقدية ؟

2 – اقترح طريقة لمحاكاة سلسلة محصل عليها من قانون الاحتمال p

3 – ألقى محمد القطعة 200 مرة فتحصل على النتائج الملخصة في الجدول الآتي :

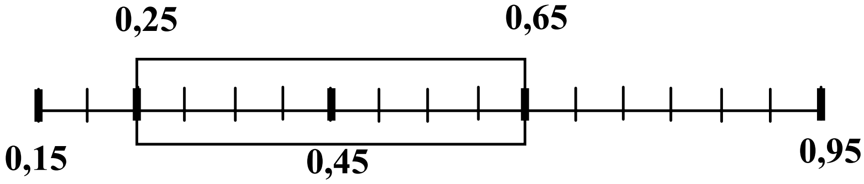
الوجه	1	2
التكرار	96	104

اقترح مقياسا (نرمز له بالرمز d_{obs}^2) لقياس التلاؤم بين النموذج p و السلسلة المشاهدة .

احسب قيمة التلاؤم .

4 – تمت محاكاة ما قام به محمد 1000 مرة و تم حساب المقياس d^2 في كل مرة فحصلنا على سلسلة في d^2 مقاسها 1000 .

وتم تلخيص هذه السلسلة بواسطة مخطط بالعلبة كما يلي :



- اقترح بعد قراءتك لهذا التمثيل عتبة تسمح لك برفض النموذج p بمجازفة بالخطأ قدرها 10% ماذا تستنتج ؟

الحل :

1 – قانون الاحتمال الذي ينمذج تصريح صاحب القطعة النقدية هو :

$$p\left(X = x_i\right) = \frac{1}{2} \quad \text{حيث :} \quad x_i \in \{1 \; ; \; 2\}$$

2 – اقتراح طريقة لمحاكاة سلسلة محصل عليها من قانون الاحتمال p : نستعمل الدستور : $= ENT\left(ALEA\left(\;\right)^* 2 + 1\right)$ الذي يعطي عددا عشوائيا بين 1 و 6 .

3 – حساب قيمة هذا التلاؤم : نقترح مقياسا نرمز به بالرمز : d^2_{obs}

2	1	الوجه
104	96	التكرار
$\frac{104}{100}$	$\frac{96}{100}$	التواترات f_i

نقيس به التلاؤم بين النموذج p و السلسلة المشاهدة ثم نحسب قيمة التلاؤم :

$$d^2_{obs} = \left(f_1 - p_1\right)^2 + \left(f_2 - p_2\right)^2$$

$$d^2_{obs} = \left(0{,}96 - 0{,}5\right)^2 + \left(1{,}04 - 0{,}5\right)^2$$

$$d^2_{obs} = \left(0{,}46\right)^2 + \left(0{,}54\right)^2 = 0{,}2116 + 0{,}2916$$

$$d^2_{obs} = 0{,}5032$$

قراءة المخطط بالعلبة :

نقرأ في هذا المخطط الربيع الأول $Q_1 = 0{,}25$

و نقرأ الربيع الثالث : $Q_3 = 0,56$

كما نقرأ العشير الأول : $D_1 = 0,15$

و العشير التاسع : $D_9 = 0,95$

اقتراح عتبة تسمح لنا برفض النموذج p بمجازفة بالخطأ قدرها 10%

من قراءة المخطط يتبين لنا أن :

90% من قيم d^2 أصغر من العشير التاسع الذي يساوي $0,95$

10% من قيم d^2 أكبر من العشير التاسع الذي يساوي $0,95$

و منه العتبة المناسبة لرفض النموذج p بمجازفة بالخطأ قدرها 10% هي العشير التاسع . أي نقبل أن d_{obs}^2 صغير بقدر كاف إذا كان أصغر من العشير التاسع .

(و بالتالي نقبل أن النموذج p يعبر بالفعل عن السلسلة المشاهدة أي متلائم معها ، و منه القطعة النقدية غير مزيفة و تصريح صاحبها صحيح أو نرفض هذا النموذج و نكون قد جازفنا 10%)

.

و لدينا : $d_{obs}^2 = 0,5032$ فهو إذن : $d_{obs}^2 < 0,96$ و منه النموذج الاحتمالي p متلائم مع السلسلة المشاهدة ، و بالتالي فهو مقبول .

و إذا أردنا أن نرفضه فإننا نكون قد جازفنا بارتكاب خطأ مجازفة قدرها 10% .

الاستنتاج :

حسب المقياس d_{obs}^2 المعتمد و العتبة المأخوذة هناك و هي العشير التاسع نستنتج أن القطعة النقدية غير مزورة و بالتالي فتصريح صاحبها صحيح .

III - قوانين الاحتمالات المستمرة :

1 – تعريف :

إذا قبل متغير عشوائي ما لا نهاية من القيم الحقيقية غير القابلة للعد ، فهذا يعني أنه لا يمكن التعبير عنه بواسطة أعداد طبيعية كأدلة ،كما هو الحال في المتغير العشوائي المتقطع لذلك نسمي هذا النوع من المتغيرات العشوائية " متغير عشوائي مستمر "

2 – الدالة " كثافة الاحتمال " :

تعريف :

نسمي دالة كثافة احتمال كل دالة f معرفة على المجال $[\alpha ; \beta]$ و تحقق الشروط الآتية :

1) f مستمرة على المجال $[\alpha ; \beta]$

2) $f(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[\alpha ; \beta]$

3) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$ (أي مساحة الحيز المستوي المحدد بمحور الفواصل و منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتيهما : $x = \alpha$ و $x = \beta$ تساوي 1) .

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha ; +\infty[$ مثلا فإن الشرط المتعلق بالمساحة يكتب : $\lim_{x \to +\infty} \int_{\alpha}^{x} f(t)dt = 1$

مثال :

الدالة f : $x \mapsto 3x^2$ و المعرفة على $[0 ; 1]$ هي كثافة احتمال على $[0 ; 1]$ لأن :

f مستمرة على المجال $[0 ; 1]$

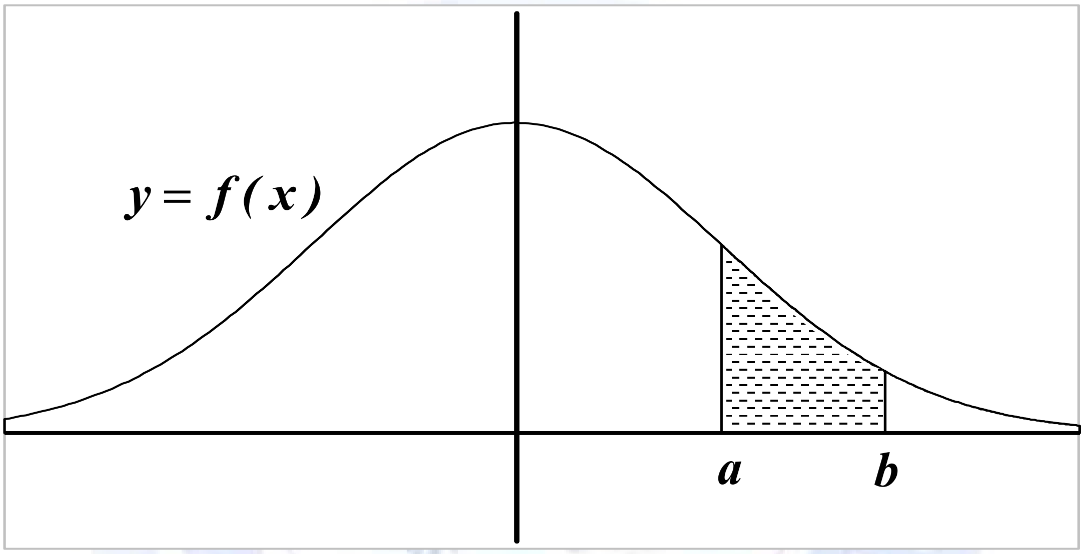
$f(x) \geq 0$ من أجل كل x من $[0 ; 1]$

$$\int_{0}^{1} 3x^2dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$$

تعريف :

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا يأخذ قيمه في المجال I من $\mathbb{R}$. والدالة f كثافة احتمال معرفة على I . نقول إن قانون الاحتمال p_X للمتغير العشوائي X يقبل f كثافة احتمال له ، إذا تحقق من أجل كل مجال $[a\ ;\ b]$ من $\mathbb{R}$ و محتوى في I :

$$p_X([a\ ;\ b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$



3 – القانون المنتظم على $[0\ ;\ 1]$:

تعريف :

لتكن f دالة ثابتة معرفة على المجال $[0\ ;\ 1]$ و تأخذ القيمة 1 على هذا المجال .
نسمي قانون الاحتمال الذي يقبل f كدالة كثافة احتمال ، القانون المنتظم على المجال $[0\ ;\ 1]$.

4 – الأمل الرياضي ، التباين ، و الانحراف المعياري :

تعريف :

X متغير عشوائي مستمر يتبع قانون احتمال يقبل f دالة كثافة له معرفة على المجال $[\alpha\ ;\ \beta]$ من $\mathbb{R}$. نعرف الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X كالآتي :

$$E(X) = \int_\alpha^\beta x f(x)\,dx \ ، \ \mathrm{V}(\mathrm{X}) = \int_\alpha^p \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\,dx$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f معرفة على مجال غير محدود كالمجال $[\alpha\ ;\ +\infty[$ مثلا فإن :

$$E(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x} tf(t)dt$$

$$V(X)=\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x}\left(t-E(X)\right)^2 f(t)dt$$

و في حالة عدم وجود النهايات أو كانت غير منتهية فإن الأمل الرياضياتي غير موجود و عليه فالتباين غير موجود .

و لتسهيل حساب التباين لدينا :

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx-\left[E(X)\right]^2$$

5 – القانون الأسي :

خاصية :

الدالة f المعرفة على المجال $[0\ ;\ +\infty[$ كما يلي : $f(x)=\lambda.e^{-\lambda x}$

حيث : λ عدد حقيقي موجب تماما ، هي دالة كثافة احتمال لأن :

f مستمرة على المجال $[0\ ;\ +\infty[$

$f(x)>0$ على $[0\ ;\ +\infty[$

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x=1-e^{-\lambda x}$$

و منه : $$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}1-e^{-\lambda x}=1$$

تعريف :

ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما.

يسمى قانون الاحتمال الذي يقبل الدالة f دالة كثافة له حيث f معرفة على المجال $[0\ ;\ +\infty[$

بالعبارة : $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ، القانون الأسي ذو الوسيط λ

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق 11:

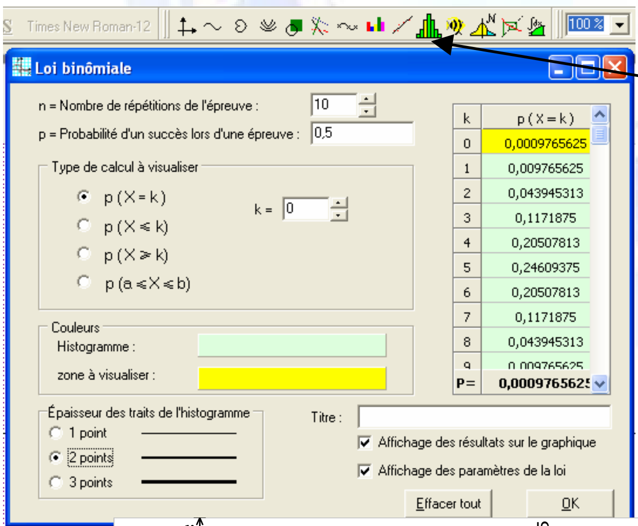
لدينا قطعة نقدية متوازنة تحمل الحرف F في وجه والحرف P في الوجه الآخر . يقوم لاعب بإلقاء القطعة النقدية 10 مرات متتالية . ويكون رابحا 100 دينارا كلما ظهر الوجه F . ليكن X المتغير العشوائي الذي يعد عدد الحالات التي يظهر فيها F . إن X يتبع القانون الثنائي p_X ذو الوسيطين 10 و0, 5 .

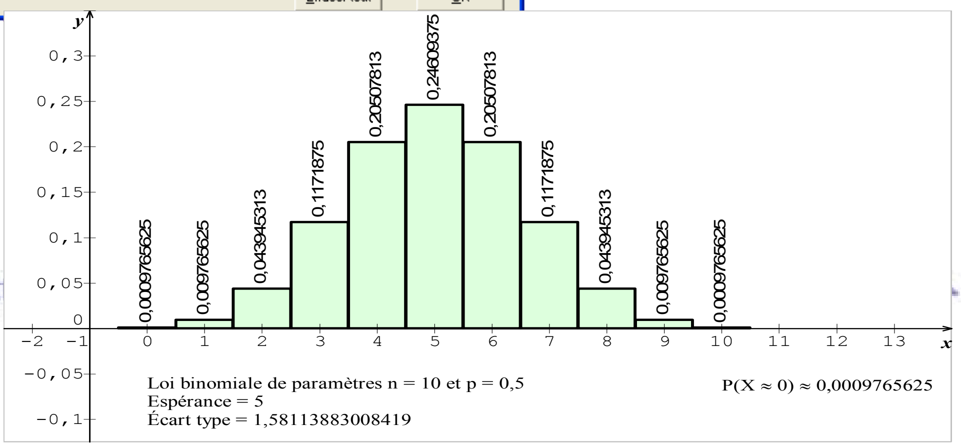
باستعمال البرمجية Sine qua non مثل بيانيا القانون p_X

الحل :

1- ننقر على

2- نعطي القيمة 10 للوسيط n والقيمة 0,5 للوسيط p ثم ننقر على OK فيظهر التمثيل البياني للقانون الثنائي.





تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

1 – يقوم لاعب بإلقاء حجر نرد ، و يعتبر اللاعب رابحا إذا كان الوجه الظاهر للنرد هو 6 .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت نتيجة الرمية هي 6 و يأخذ القيمة 0 إذا كانت نتيجة الرمية غير ذلك .

1 – عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2 – يقوم الآن اللاعب بإلقاء النرد 3 مرات متتابعة في نفس الشروط .

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات .التي يربح فيها هذا اللاعب .

أ- ما هي القيم الممكنة لـ Y .

ب- مثل المخارج الممكنة لهذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

ت- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y .

التمرين 2 .

يقوم لاعب برمي قطعة نقدية متوازنة 8 مرات متتالية بحيث يتحصل على 50 دينارا عن كل رمية يظهر فيها وجه القطعة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يظهر فيها الوجه .

1 – احسب احتمال أن يتحصل اللاعب على 100 دينار.

2 - احسب احتمال أن يتحصل اللاعب على 300 دينار .

3 – عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

4 – مثل بمخطط بالأعمدة قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين 3 .

يحتوي مجمع اقتصادي على عدة محلات ذات طابع تجاري من بينهم مكتبة .

في دراسة إحصائية لوحظ أنه من بين 10 زوار للمجمع هناك شخص واحد يزورالمكتبة .

نفرض في إحدى الأيام إقبال 100 شخص على المجمع .

- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يعطي النسبة المئوية للزوار الذين يزورون المكتبة .

التمرين 4 .

تتحرك نقطة M على محور انطلاقا من مبدئه 0 بحيث تقفز نحو اليمين أو نحو اليسار بوحدة واحدة (أي تقفز من المبدأ 0 نحو النقطة ذات الفاصلة 1 أو نحو النقطة ذات الفاصلة (1-) و

هكذا ، فإن قفزت مرتين متتاليتين نحو اليمين انطلاقا من المبدأ 0 صارت في النقطة ذات الفاصلة 2

. احتمال أن تقفز هذه النقطة نحو اليمين هو p $\left(0 < p < 1\right)$

و احتمال أن تقفز نحو اليسار هو $1 - p$

نفرض أن كل قفزة مستقلة عن الأخرى و أن M تقفز n مرة .

1- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يحصي عدد القفزات نحو اليمين من بين n قفزة .

2- أحسب متوسط عدد القفزات نحو اليمين المنجزة من قبل النقطة M .

3- أحسب احتمال أن تعود النقطة M إلى المبدأ 0 بعد القفزة الأخيرة أي القفزة ذات الرتبة n .

التمرين 5 .

يحتوي وعاء على 10 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء ، نسحب في آن واحد كريتين .

نكرر هذه التجربة 5 مرات بحيث نعيد الكريتين المسحوبتين في نهاية كل سحب .

أحسب احتمال الحصول في نهاية السحبات الخمسة على :

1 – كريتين بيضاويتين 4 مرات .

2 – كريتين من نفس اللون 5 مرات .

3 – كريتين من لونين مختلفين 3 مرات .

التمرين 6 .

آلة لإنتاج قطع الغيار تنتج 10 % من القطع غير صالحة للاستعمال ، تم إنتاج 10 قطع من طرف هذه الآلة . و بما أن الآلة تنتج عددا كبيرا جدا من قطع الغيار فإن إنتاج العشرة قطع يمكن محاكاته بسحب 10 قطع على التوالي مع الإعادة قبل السحب الموالي .

احسب احتمال الأحداث الآتية :

1 – أن تكون قطعتان فقط غير صالحتين للاستعمال .

2 – أن تكون قطعة على الأكثر غير صالحة للاستعمال .

3 – أن تكون جميع القطع غير صالحة للاستعمال .

4 – أن تكون كل القطع صالحة للاستعمال .

التمرين 7 .

في إحدى حصص مادة الرياضيات و في درس الاحتمالات سأل الأستاذ التلاميذ عن حجر النرد الذي يستعملونه في الدرس إن كان مزورا أم لا فأجاب كل التلاميذ بأنه غير مزور من خلال الشكل العام للنرد .

1 – ما هو قانون الاحتمال p الذي ينمذج إجابة التلاميذ .

2 – اقترح طريقة لمحاكاة سلسلة محصل عليها من قانون الاحتمال p .

3 – قام أحد التلاميذ بإلقاء حجر النرد 500 مرة فتحصل على النتائج الملخصة في الجدول أسفله :

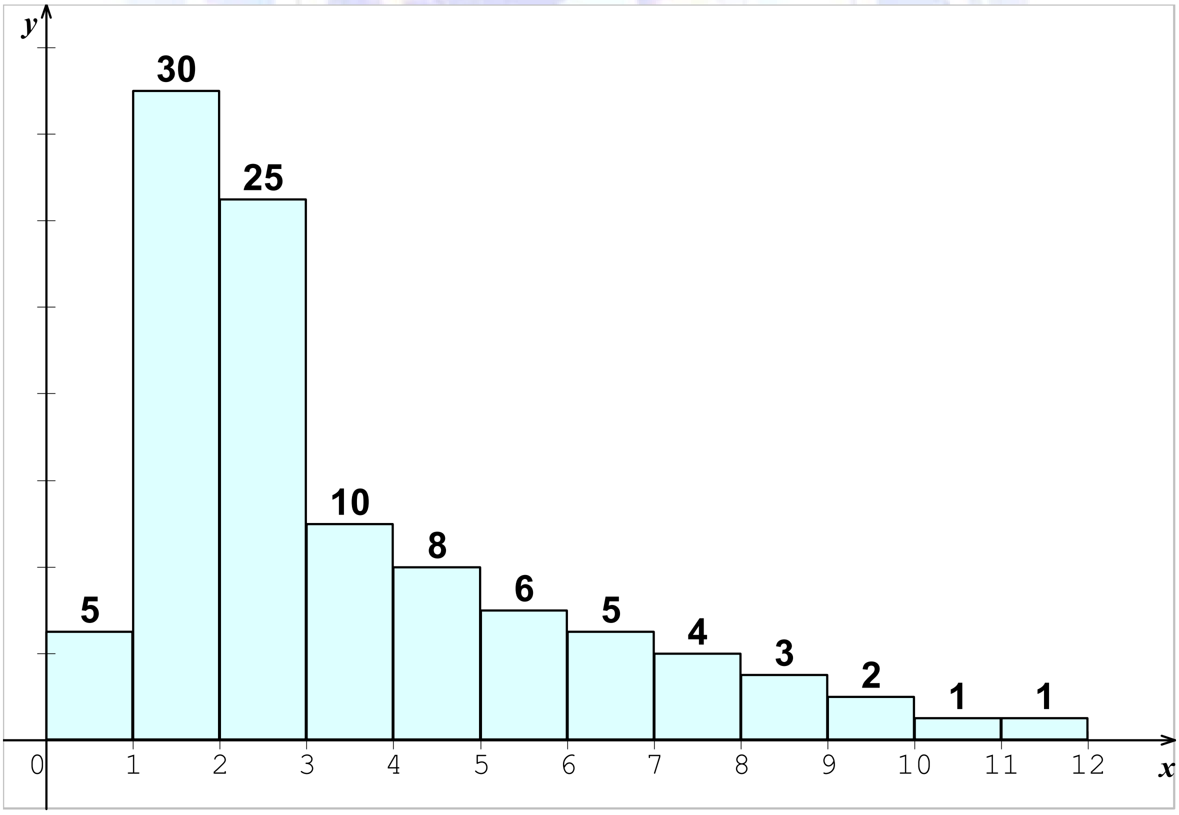
الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار	80	90	70	70	100	90

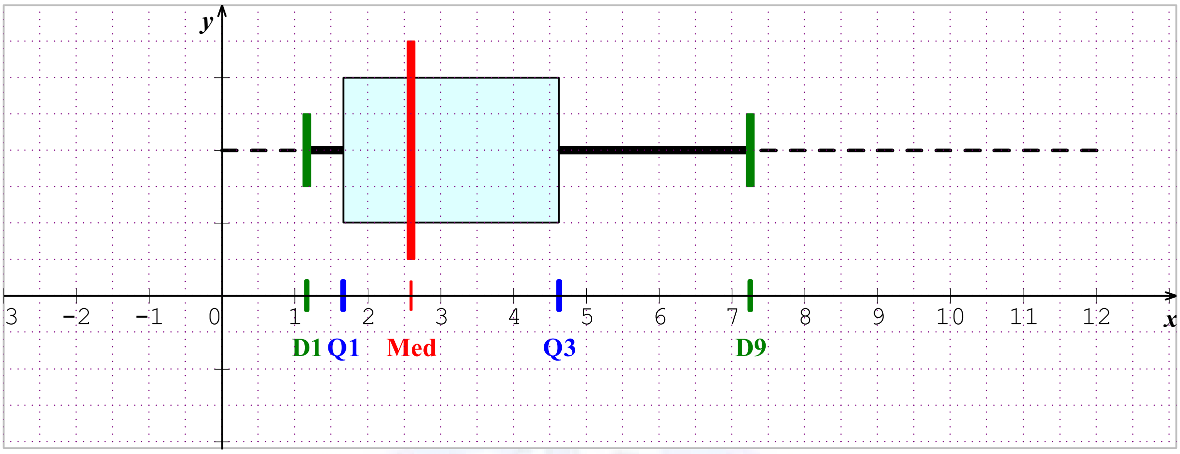
اقترح مقياسا (نرمز له بالرمز d_{obs}^2) لقياس التلاؤم بين النموذج p و السلسلة المشاهدة .

أحسب قيمة التلاؤم ؟

4- تمت المحاكاة ما قام به هذا التلميذ 1000 مرة و تم حساب المقياس d^2 في كل مرة فحصلنا على سلسلة قيم d^2 مقاسها 1000 .

5- و إليك ملخص هذه السلسلة بواسطة مدرج تكراري و مخطط بالعلبة .





- المخطط بالعلبة قيم الربعيان و العشريان مضروبة في 1000 .

- اقترح بعد قراءة هذين التمثيلين(المدرج التكراري ،ومخطط العلبة)

عتبة تسمح لك برفض النموذج p بمجازفة بالخطأ قدرها 10% ماذا تستنتج ؟

التمرين 8 .

f دالة معرفة على المجال $[0\ ;\ 1]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}$

بين أن f دالة كثافة احتمال على المجال $[0\ ;\ 1]$.

التمرين 9 .

إن تركيز محلول كيميائي في محلول حمضي يتراوح بين

$0\ mg/L$ و $1\ mg/L$.

الجهاز الذي يقيس تركيز المحلول غير مضبوط فهو يعطي قيمة عشوائية بين 0 و 1 .

تمت نمذجة النتائج التي أعطاها هذا الجهاز بواسطة متغير عشوائي يتبع القانون المنتظم على المجال $[0\ ;\ 1]$.

ما هو احتمال أن يعطي الجهاز نتيجة محصورة بين $0,2mg/L$ و $0,6mg/L$.

التمرين 10 .

يرمز X إلى متغير عشوائي يتبع قانون احتمال منتظم على المجال $[0\ ;\ 1]$ نضع :

$y=6X+2$ ، و نقبل أن y هو أيضا متغير عشوائي معرف على نفس الفضاء الذي عرف عليه X و مرفق بقانون احتمال p

1 – عين المجال $[a\ ;\ b]$ الذي ينتمي إليه y

2 – نقبل أن دالة الكثافة لقانون احتمال y هي دالة ثابتة على المجال $[a\ ;\ b]$. عين هذه الدالة .

3 – أحسب $p_y([3\ ;\ 4])$

4 – أحسب $E(Y)$ و $V(Y)$

التمرين 11 .

ليكن X متغير عشوائي مستمر و دالة الكثافة f لقانون احتمال X معرف على المجال $[1\ ;\ 2]$

بالعبارة : $f(x)=\alpha.\dfrac{x+Lnx}{x^2}$ ، α عدد حقيقي ثابت .

1 – عين : α

2 – احسب : $E(X)$ و $V(X)$

التمرين 12 .

قام كميائي بقياس درجة الحرارة الناتجة عن تفاعل كيميائي بالكيلو كالوري $Kcal$ ، ثم لخص نتائج القياس بواسطة مدرج تكراري ثم نمذج هذا المدرج بالدالة f المعرفة على المجال $[0\ ;\ 1]$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(t)=\alpha t & ; \quad t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right[\\ f(t)=\alpha(1-t) & ; \quad t\in\left[\dfrac{1}{2};1\right] \end{cases}$$

α عدد حقيقي ثابت ، t كمية الحرارة .

1 – عين α حتى تكون f كثافة احتمال .

2 – احسب احتمال أن تكون كمية الحرارة الناتجة عن التفاعل محصورة بين : $0,1Kcal$ و $0,6Kcal$.

3 – عين متوسط كمية الحرارة الناتجة عن هذا التفاعل .

التمرين 13 .

نسمي قانون احتمال منتظم على المجال $[a\ ;\ b]$ من $\mathbb{R}$ كل قانون احتمال كثافته f معرفة على المجال $[a\ ;\ b]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$

باستعمال قانون منتظم مختار بعناية حل المسألة الآتية .

في محطة نقل المسافرين تقلع حافلة لنقل المسافرين لولاية معينة كل 140 دقيقة . يصل أحد المسافرين صدفة إلى هذه المحطة .

1 – عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي تقلع أول حافلة إلى الولاية التي يقصدها .

2 – عين متوسط الفترة الزمنية التي ينتظر فيها هذا المسافر إقلاع الحافلة .

3 – احسب احتمال أن ينتظر هذا المسافر فترة زمنية تتعدى 50 دقيقة .

التمرين 14 .

تمت نمذجة مدة صلاحية حاسوب بالأشهر بواسطة متغير عشوائي X يتبع قانون أسي ذو الوسيط $0,01$.

1 – ما هو احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب أصغر من 50 شهرا .

2 – ما هو احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب أكبر من 50 شهرا .

التمرين 15 .

كيس به 50 كرية مرقمة من 1 إلى 50 .

نسحب من الكيس كرية واحدة . أحد اللاعبين يربح في هذه اللعبة كلما حصل على عدد من مضاعفات 5 .

1 – بين أن هذه التجربة لبرنولي .

2 – احسب احتمال كل من الربح و الخسارة .

3 – ما هو وسيط المتغير العشوائي لبرنولي .

4 – احسب $E(X)$ ، $V(X)$ ، $\sigma(X)$

التمرين 16 .

صنعت قطعة نقود متوازنة حيث أحد الوجهين يحمل الحرف A و الآخر يحمل الحرف B .

يقذف أحد تلاميذ القسم في حصة أعمال تطبيقية هذه القطعة نحو الأعلى 20 مرة متتابعة بحيث يحصل على $0,5$ نقطة كلما ظهر الوجه الذي يحمل الحرف A .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعد عدد النجاحات لهذا التلميذ خلال التجربة .

1 – ما هو احتمال أن يحصل هذا التلميذ على 6 نقط خلال التجربة .

2 – ما هو احتمال أن يحصل هذا التلميذ على 10 نقط خلال التجربة .

التمرين 17 .

تم استجواب عينة من 10 أشخاص فتبين أن احتمال أن يختار شخص مختار عشوائيا من هذه العينة منتوج شركة لصناعة الحواسيب

هو $0,6$ و ليكن X عدد الأشخاص الذين يختارون حواسيب هذه الشركة من بين العينة التي تم استجوابها من أجل $k \in \{0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ ,...,10\}$

اكتب قانون الاحتمال $p_k = p(X = k)$ بدلالة k

- ما هو احتمال أن يختار 3 أشخاص من هذه العينة إنتاج الحواسيب لدى هذه الشركة .

التمرين 18 .

إليك عدد الكتب التي تقرض في مكتبة عمومية خلال أسبوع :

أيام الأسبوع	السبت(1)	الأحد(2)	الاثنين(3)	الثلاثاء(4)	الأربعاء(5)
عدد الكتب	220	210	200	190	180

يريد مدير المكتبة أن يعرف إن كان قرض الكتب مستقلا عن اليوم الذي تقرض فيه خلال الأسبوع .

1 – ما هو قانون الاحتمال p الذي تقترحه لنمذجة هذه الفرضية .

2 – ما هي الطريقة التي تقترحها لمحاكاة سلسلة و فق p .

3 – أحسب معيار مقياس التلاؤم d^2 للنموذج الاحتمالي p و سلسلة تواترات الاحتمال .

4 – قمنا بمحاكاة التجربة في 1000 سلسلة و كل سلسلة ذات 1000 قيمة بعد حساب d^2 في كل سلسلة وجدنا أن العشير التاسع

للقيم d^2 هو $D_9 = 0,003$ فهل القاعدة التي تقول أن الإقبال

على المكتبة مستقل عن أيام الأسبوع .

التمرين 19 .

نعلم أن الانشطار النووي الإشعاعي، مقدر بالسنوات مرفق بتجربة عشوائية يتبع قانون احتمال أسي

و سيطه λ $(\lambda > 0)$

في دراسة تمت على مجموعة من الأنوية تبين أن احتمال أن تعيش

بين 0 و 100 سنة هو $0,048$.

1 – احسب الوسيط λ للقانون الأسي .

2 – احسب الاحتمال لكي تنشطر النواة في أقل من 180 سنة .

3 – احسب الاحتمال لكي يتم الإنشطار على الأقل في 180 سنة .

4 – احسب المدة المتوسطة لإنشطار النواة .

الحــــــــــلــــــــــو ل

التمرين 1 .

1 – تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

هذه التجربة لها مخرجين هما :

الحادثة A "ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 6"

الحادثة B "ظهور الوجه الذي يحمل أحد الأرقام 1،2،3،4،5 "

حيث : $p(A)=\frac{1}{6}$ ، $p(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

و عليه فهي تجربة لبرنولي ذات الوسيط p حيث : $p=\frac{1}{6}$

وينتج قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X كما يلي :

$p_X(1)=\frac{1}{6}$ و $p_X(0)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

x_i	1	0
$p_X(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

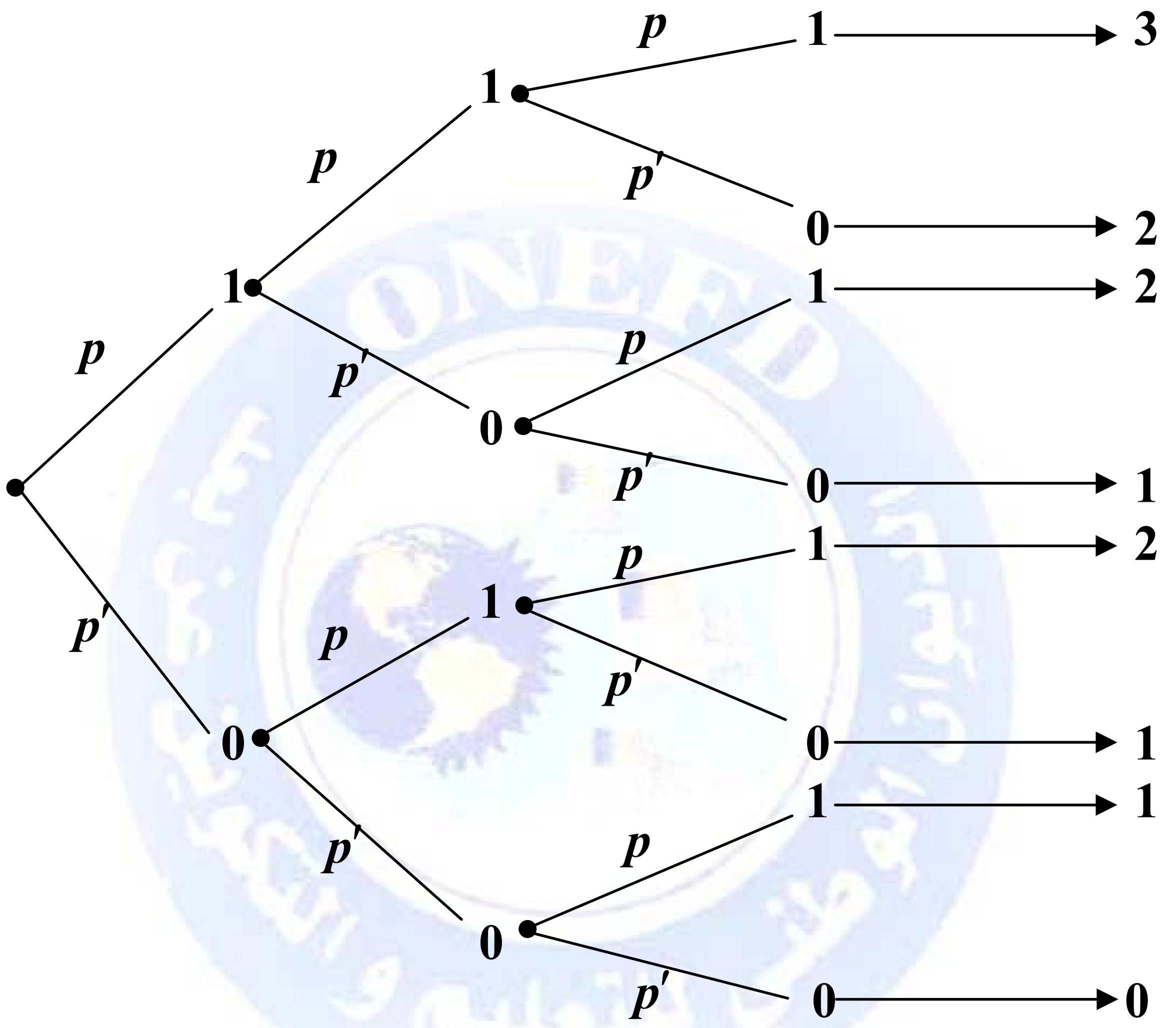
2 – أ) عدد المرات التي يربح فيها هذا اللاعب خلال الرميات هو 0 أو 1 أو 2 أو 3

و منه القيم الممكنة لـ: Y هي : 0،1،2،3

ب) تمثيل المخارج الممكنة بشجرة الاحتمالات :

نفرض: $p=\frac{1}{6}$ ، $p'=\frac{5}{6}$

الرمية 1   الرمية2   الرمية3   عدد الرميات التي يربح فيها اللاعب



و عليه :

$$p_y(0) = p^0 \times p' \times p' \times p' = p^0 \times p'^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$p_y(1) = 3.p.p'^2 = 3\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$p_y(2) = 3.p^2.p' = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

$$p_y(3) = p^3 . p'^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

و عليه :

y_i	0	1	2	3
$p_y(y_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

و يمكن تطبيق القانون :

$$p_y(k) = C_n^k p^k . q^{n-k}$$

$$p_y(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 . \left(\frac{5}{6}\right)^{3-0} = \frac{125}{216}$$

$$p_y(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 . \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = \frac{75}{216}$$

$$p_y(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{5}{6}\right)^{3-2} = \frac{15}{216}$$

$$p_y(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 . \left(\frac{5}{6}\right)^{3-3} = \frac{1}{216}$$

التمرين 2 .

بما أن لرمي القطعة النقدية مخرجين فقط هما الوجه أو الظهر ، فإننا أمام تجربة برنولي ذات الوسيط : $p = 0,5$

و عليه : $p_X(k) = C_8^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{8-k}$

أي : $p_X(k) = C_8^k . \left(\frac{1}{2}\right)^8$

1 – لكي يتحصل اللاعب على 100 دينار ينبغي أن يظهر الوجه مرتين و منه : $k = 2$

$$p_X(2)=C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^8=28\times\frac{1}{256}=\frac{28}{256}$$

$$p_X(2)\simeq 0{,}1094$$

2 – لكي يتحصل اللاعب على 600 دينار ينبغي أن يظهر الوجه 6 مرات و منه : $k=6$

$$p_X(6)=C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{8-6}$$

$$p_X(6)=C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{28}{256}$$

$$p_X(6)\simeq 0{,}1094$$

3 – تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$p_X(0)=C_8^0\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}\ ،\ p_X(1)=C_8^1\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8}{256}$$

$$p_X(2)=C_8^2\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{28}{256}\ ،\ p_X(3)=C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{56}{256}$$

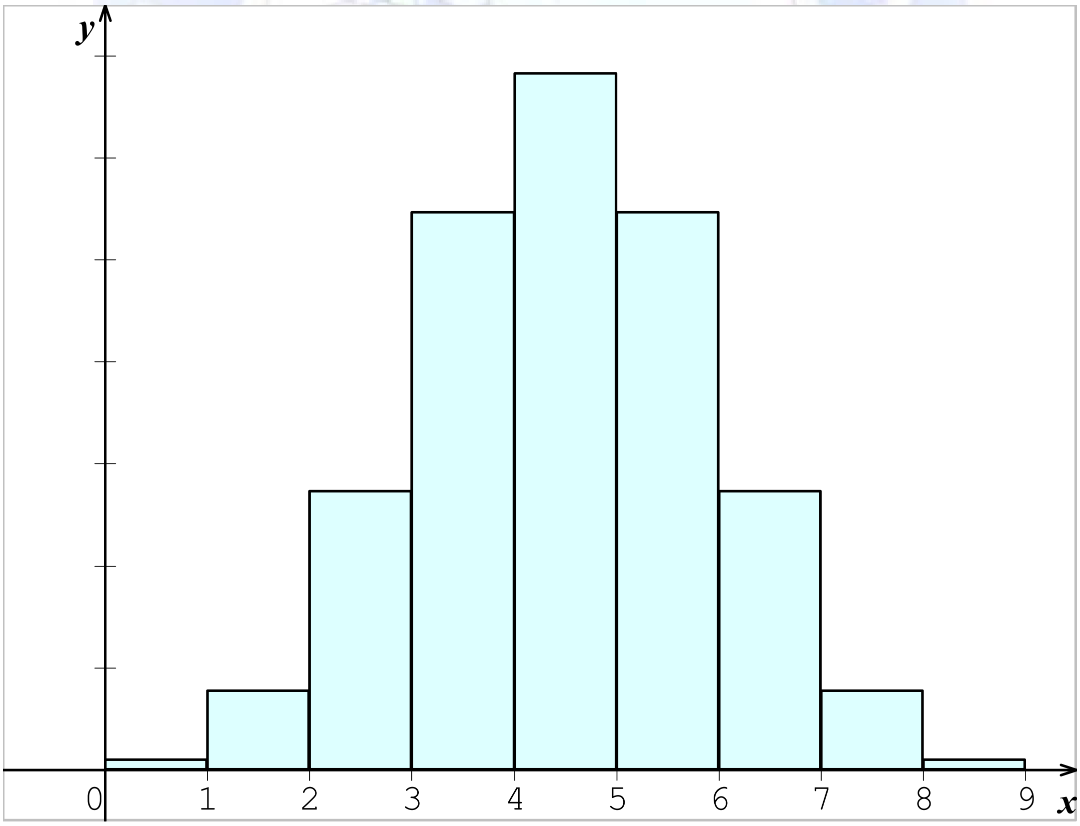
$$p_X(4)=C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{70}{256}\ ،\ p_X(5)=C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{56}{256}$$

$$p_X(6)=C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{28}{256}\ ،\ p_X(7)=C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{8}{256}$$

$$p_X(8)=C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$$

k	0	1	3	2	4	5	6	7	8
$p_X(k)$	$\frac{1}{256}$ $\simeq 0,004$	$\frac{8}{256}$ $\simeq 0,031$	$\frac{28}{256}$ $0,109$	$\frac{56}{256}$ $0,219$	$\frac{70}{256}$ $0,273$	$\frac{56}{256}$ $0,129$	$\frac{28}{256}$ $0,109$	$\frac{8}{256}$ $0,031$	$\frac{1}{256}$ $0,004$

4 – التمثيل بأعمدة لقانون احتمال المتغير العشوائي X :



التمرين 3 .

- يمكن ربط زيارة كل شخص للمجمع بتجربة برنولي (فهو إما أن يزور المكتبة و هذا يمثل مخرج النجاح في التجربة و إما أن لا يزور المكتبة و هذا يمثل مخرج الفشل في التجربة .
- بما أنه لوحظ من بين 10 زوار واحد منهم يزور المكتبة فإن الوسيط لتجربة برنولي هو p

حيث : $p=\dfrac{1}{10}$ أي : $p=0,1$

- و عليه احتمال النجاح هو $0,1$ بينما يمثل احتمال الفشل فيها (عدم زيارة المكتبة) هو $1-p$ أي : $0,9$
- و بما أن عدد الزوار وصل 100 فإنه يمكن ربط ذلك بتكرار لتجربة برنولي ذات الوسيط p : 100 مرة في نفس الشروط المستقلة .
- نعتبر X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد الزوار ، من بين 100 زائر ، الذين سيزورون المكتبة .
- إذن المتغير العشوائي X يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 100 و $0,1$

و منه حسب هذا القانون ينتج :

$$p_X(k)=C_{100}^{k}.P^{k}.(1-P)^{100-k} \quad \text{مع} \quad k\in\{0\ ;\ 1\ ;\ ...;100\}$$

و منه : $p_X(k)=C_{100}^{k}.(0,1)^{k}\,(0,9)^{100-k}$ مع :

$$k\in\{0\ ;\ 1\ ;\ ...;100\}$$

و بتعويض قيم k في القانون أعلاه نتحصل على النتائج التي نلخصها بعد حسابها في الجدول الآتي:

k	0	1	2	...	100
$p_X(k)$	$(0,9)^{100}$	$100(0,1)^{1}(0,9)^{99}$	$4950(0,1)^{2}(0,9)^{98}$	...	$(0,1)^{100}$

التمرين 4 .

1 – تعيين قانون الاحتمال :

كل قفزة للنقطة M تمثل تجربة برنولي ذات مخرجين هما : القفز نحو اليمين أو القفز نحو اليسار نرفق بهذه التجربة المتغير العشوائي لبرنولي الذي يأخذ القيمة 1 حينما تقفز M بوحدة واحدة نحو اليمين و يأخذ القيمة 0 حينما تقفز M بوحدة واحدة نحو اليسار ، نرمز بالرمز p إلى وسيط هذه التجربة .

و منه المتغير العشوائي X الذي يحصي عدد القفزات نحو اليمين من بين n قفزة يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p أي :

$$p_X(k)=\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k} \text{ مع } k\in\{0\ ;\ 1\ ;\ ...;n\}$$

2 – حساب متوسط عدد القفزات نحو اليمين المنجزة من قبل M : و

هو الأمل الرياضي . حيث : $E(X)=np$

3 – حساب احتمال أن تعود M إلى 0 :

عدد القفزات الكلي هو n و عدد القفزات نحو اليمين هو X . و منه عدد القفزات إلى اليسار هو $n-X$

و منه نعرف المتغير العشوائي X الذي يعطي فاصلة M بعد قفزة

كما يلي : $y=X-(n-X)$ إذن : $Y=2X-n$

و عليه : $y=0$ إذا وفقط إذا كان : $X=\frac{n}{2}$

و منه الاحتمال المطلوب هو : $p_y(0)$

$p_y(0)=p_X\left(\frac{n}{2}\right)=C_n^{\frac{n}{2}}p^{\frac{n}{2}}.(1-p)^{n-\frac{n}{2}}$ من أجل n زوجي .

إذن : $p_y(0)=C_n^{\frac{n}{2}}.p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{\frac{n}{2}}$ من أجل n زوجي .

و إذا كان n فردي فإن : $p_y(0)=p_X\left(\frac{n}{2}\right)=0$

التمرين 5 .

1 – حساب احتمال سحب كريتين بيضاويتين 4 مرات :

عند سحب كريتين من الوعاء مرة واحدة يكون احتمال سحب كريتين بيضاويتين هو p_1 حيث :

$$p_1 = \frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها عل كريتين بيضاويتين. بما أننا نكرر التجربة 5 مرات في نفس الشروط المستقلة فإن القيم الممكنة للمتغير X هي $5,4,3,2,1,0$.

من الواضح أن المتغير X يتبع القانون الثنائي ذوالوسيطين 5 و p_1

و منه :

$$p_{X_1}(4) = C_5^4 \times p_1^4 (1 - p_1)^1$$

$$p_{X_1}(4) = 5 \times \left(\frac{3}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{3}{7}\right)^1 = 5\left(\frac{3}{7}\right)^4 \times \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1620}{16807}$$

$$p_{X_1}(4) \simeq 0,096$$

2 – حساب احتمال سحب كريتين من نفس اللون 5 مرات:

عند سحب كريتين من الوعاء مرة واحدة يكون احتمال سحب كريتين من نفس اللون هو p_2 حيث :

$$p_1 = \frac{C_{10}^2 + C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{45+10}{105} = \frac{55}{105} = \frac{11}{21}$$

ليكن X_2 المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل بها على كريتين من نفس اللون .

بما أن تكرار التجربة 5 مرات في نفس الشروط المستقلة فإن القيم الممكنة للمتغير X_2 هي :

$$5,4,3,2,1,0$$

من الواضح أن المتغير X_2 يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 5 و p_2

و منه :

$$p_{X_2}(5) = C_5^5 . p_2^5 (1 - p_2)^0$$

$$p_{X_2}(5) = 1.\frac{11}{21}.1 = \frac{11}{21}$$

3 – حساب احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين 3 مرات عند سحب كريتين من الوعاء مرة واحدة يكون احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين هو p_3 حيث :

$$p_2 = \frac{C_{10}^{1} \times C_{5}^{1}}{C_{15}^{2}} = \frac{10 \times 5}{105} = \frac{50}{105} = \frac{10}{21}$$

ليكن X_3 المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل بها على كريتين من لونين مختلفين . بما أننا كررنا التجربة 5 مرات في نفس الشروط المستقلة فإن القيم الممكنة للمتغير X_3 هي: $5,4,3,2,1,0$

من الواضح أن المتغير X_3 يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين 5 و p_3

و منه :
$$p_{X_3}(5) = C_5^3 . p_3^3 (1 - p_3)^2$$

$$p_{X_3}(3) = 10 \times \left(\frac{10}{21}\right)^3 \times \left(1 - \frac{10}{21}\right)^2 = 10.\left(\frac{10}{21}\right)^3 \times \left(\frac{11}{21}\right)^2$$

$$p_{X_3}(3) = \frac{1210000}{4084101} \simeq 0,296$$

التمرين 6 .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي نتحصل فيها على قطع صالحة للاستعمال و منه قيم X هي : 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 و منه :

$$p_X(k) = C_{10}^{k} . p^{k} . (1 - p)^{10-k}$$

بما أن 10% من القطع غير صالحة للاستعمال فإن 90% من القطع صالحة للاستعمال و عليه احتمال الحصول على قطعة صالحة للاستعمال هو :

$p = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ أي : $p = 0,9$ و عليه : $1 - p = 0,1$

1) احتمال أن تكون قطعتان غير صالحتين للاستعمال :

$$p_X(2) = C_{10}^{2} . (0,9)^8 . (0,1)^2$$

إذن : $p_X(2) = 45 \times (0,9)^8 \times (0,1)^2$

أي أن : $p_x(2) \simeq 0,194$

2) احتمال أن تكون قطعة على الأكثر غير صالحة للاستعمال :

$$p_X(X\geq 9)=p_X(X=9)+p_X(X=10)$$
$$=C_{10}^{9}(0,9)^9\times(0,1)^1+C_{10}^{10}(0,9)^{10}\times(0,1)^0$$
$$=10(0,9)^9\times(0,1)^1+(0,9)^{10}$$
$$\simeq 0,736$$

3) احتمال أن تكون جميع القطع غير صالحة للاستعمال :

$$p_X(0)=C_{10}^{0}.(0,9)^0.(0,1)^{10}$$
$$p_X(0)=(0,1)^{10}$$
$$p_X(0)=10^{10}$$

4) احتمال أن تكون كل القطع صالحة للاستعمال :

$$p_X(10)=C_{10}^{10}(0,9)^{10}\times(0,1)^0=(0,9)^{10}=0,349$$
$$p_X(10)=(0,9)^{10}$$
$$p_X(10)\simeq 0,349$$

التمرين 7 .

إذا كان النرد غير مزور فإن احتمال ظهور كل وجه هو $\frac{1}{6}$ و منه قانون الاحتمال p الذي ينمذج

إجابة التلاميذ هو $p(x=k)=\frac{1}{6}$ حيث : $k\in\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\}$

2- إقتراح طريقة لمحاكاة سلسلة نحصل عليها من قانون الاحتمال p

نستعمل الدستور $=ENT\left(ALEA\ (\ )^*6+1\right)$ الذي يعطى عددا عشوائيا بين 1 و 6

3- إقتراح مقياس التلاؤم :

لدينا :

6	5	4	3	2	1	الوجه
90	100	70	70	90	80	التكرار
$\frac{90}{500}$	$\frac{100}{500}$	$\frac{70}{500}$	$\frac{70}{500}$	$\frac{90}{500}$	$\frac{80}{500}$	التواترات f_i

و منه :

$$d_{abc}^2 = \left(\frac{80}{500}-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{90}{500}-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{70}{500}-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{70}{500}-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{100}{500}-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{90}{500}-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$= (0,16-0,166)^2 + (0,18-0,166)^2 + 2(0,14-0,166)^2 + (0,2-0,166)^2 + (0,18-0,166)^2$$

$$= 36.10^{-6} + 196.10^{-6} + 1352.10^{-6} + 1156.10^{-6} + 196.10^{-6}$$

$$= 2936.10^{-6}$$

إذن : $d_{obs}^2 = 0,002936$

4- لدينا سلسلة قيم d^2 ذات المقياس 1000 كما يلي :

المجالات	النسب المئوية لقيم d^2 التي تنتمي إلى هذا المجال .
$[0;0,001[$	5%
$[0,001\ ;\ 0,002[$	30%
$[0,002\ ;\ 0,003[$	25%
$[0,003;0,004[$	10%
$[0,004;0,005[$	8%
$[0,005;0,006[$	6%
$[0,006;0,007[$	5%
$[0,007;0,008[$	4%
$[0,008;0,009[$	3%
$[0,009;0,010[$	2%
$[0,010;0,011[$	1%
$[0,011;0,012[$	1%

و لدينا : $D_1 = 0,0011$ (العشير الأول)

$Q_1 = 0,0016$ (الربيع الأول)

$Q_3 = 0,0046$ (الربيع الثالث)

$D_9 = 0,007$ (العشير التاسع)

$MED = 0,0026$ (الوسيط)

إقتراح عتبة تسمح لنا برفض النموذج p بمجازفة بالخطأ قدرها 10%

مما سبق يتبين أن :

90% من قيم d^2 أصغر من D_9 $(D_9 = 0,007)$

10% من قيم d^2 أكبر من D_9

و منه العتبة المناسبة لرفض النموذج p بمجازفة بالخطأ قدرها

10% هي D_9 .

أي نقبل أن d^2_{obs} صغير بقدر كاف إذا كان أصغر من العشير التاسع .

(و بالتالي نقبل أن النموذج p يعبر بالفعل عن السلسلة المشاهدة أي متلائم معها , و منه حجر النرد غير مزيف و إجابة التلاميذ صحيحة . أو نرفض هذا النموذج و نكون بذلك قد جازفنا 10%)

و بما أن $d^2_{obs} = 0,002936$ فإن : $d^2_{obs} < 0,007$.

و عليه $d^2_{obs} < D_9$.

و منه النموذج الاحتمالي p متلائم مع السلسلة المشاهدة و بالتالي فهو مقبول .

و إذا أردنا أن نرفضه فإننا نكون قد جازفنا بارتكاب خطأ مجازفة قدرها 10% .

الاستنتاج :

حسب المقياس d^2_{obs} المعتمد و العتبة المأخوذة هنا و هي (العشير التاسع) أن حجر النرد الذي استعمل في القسم غير مزور و بالتالي إجابة التلاميذ صحيحة .

التمرين 8 .

لدينا : 1- الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود و عليه فهي مستمرة على المجال $[0\ ;\ 1]$

2- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0\ ;\ 1]$ فإن :

$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4} > 0$ و عليه $f(x) \geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x في المجال $[0\ ;\ 1]$

-3
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) - (0 + 0)$$

إذن : $\int_0^1 f(x)dx = 1$

و عليه الدالة f تحقق شروط تعريف دالة كثافة احتمال .

و منه f هي دالة كثافة احتمال على المجال $[0;1]$.

التمرين 9 .

بما أن المتغير العشوائي الذي تمت بواسطته نمذجة النتائج يتبع القانون المنظم على $[0;1]$ و بما أن : $[0,2\ ;\ 0,6]\subset[0;1]$

فإن الاحتمال المطلوب :

$$p_x([0,2;0,6]) = \int_{0,2}^{0,6} 1dx = [x]_{0,2}^{0,6} = 0,6-0,2 = 0,4$$

التمرين 10 .

1- تعيين المجال $[a\ ;\ b]$ الذي ينتمي إليه y :

لدينا : $0 \le x \le 1$ أي: $0 \le 6x \le 6$ أي: $2 \le 6x+2 \le 8$

و منه المجال الذي تنتمي إليه y هو $[2\ ;\ 8]$.

2- تعيين دالة الكثافة لقانون احتمال y

بما أن دالة الكثافة لقانون احتمال y ثابتة فإذا رمزنا لها بالرمز f

فإن $f(y) = \alpha$ من أجل كل عدد y من $[2\ ;\ 8]$ مع α عدد حقيقي

- الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة ثابتة و منه فإنها مستمرة على $[2\ ;\ 8]$.
- حتى تكون الدالة f موجبة على $[2\ ;\ 8]$ يكفي أحد α موجب أي $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

و لدينا : $\int_2^8 f(y)dy = 1$ و عليه : $\int_2^8 \alpha dy = 1$ و منه : $[\alpha y]_2^8 = 1$

و عليه : $6\alpha = 1$ و منه : $\alpha = \frac{1}{6}$ و هو موجب .

إذن دالة الكثافة المطلوبة هي f حيث : $f(y)=\frac{1}{6}$

3 – حسب $p_y([3\ ;\ 4])$

لدينا : $p_y([3\ ;\ 4])=\int_3^4 f(y)dy$

و منه : $p_y([3\ ;\ 4])=\int_3^4 \frac{1}{6}dy=\left[\frac{1}{6}y\right]_3^4=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

إذن : $p_y([3\ ;\ 4])=\frac{1}{6}$

4 – حساب $E(y)$ و $\mathrm{V}(y)$:

$$E(y)=\int_2^8 yf(y)dy=\int_2^8 \frac{1}{6}ydy=\left[\frac{y^2}{12}\right]_2^8=\frac{64}{12}-\frac{4}{12}=\frac{60}{12}$$

إذن : $E(y)=5$

$$\mathrm{V}(y)=\int_2^8 y^2 f(y)dy-\left[E(y)\right]^2=\int_2^8 \frac{1}{6}y^2dy-(5)^2$$

$$=\left[\frac{y^3}{18}\right]_2^8-25=\frac{8^3}{18}-\frac{2^3}{18}-25$$

$$=\frac{504}{18}-25=28-25$$

إذن : $\mathrm{V}(y)=3$

التمرين 11 .

1 – تعيين α :

الدالة f تحقق شروط دالة الكثافة لقانون احتمال X .

- الدالة f مستمرة على $]0\ ;\ +\infty[$ لأنها مجموع و حاصل قسمة

دوال مستمرة على هذا المجال و منه فهي مستمرة على $[1\ ;\ 2]$

- الدالة f موجبة على $[1\ ;\ 2]$ من أجل $\alpha > 0$.

لأن : $Lnx > 0$ و $x > 0$ و $x^2 > 0$

- لدينا : $\int_1^2 f(x)dx = 1$ و عليه : $\alpha\int_1^2 \frac{1}{x} + \frac{Lnx}{x^2}dx = 1$

و هذا يكافئ : $\alpha\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \alpha\int_1^2 \frac{Lnx}{x^2}dx = 1 \quad ...(1)$

حيث : $\alpha\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \alpha[Lnx]_1^2 = \alpha Ln2$

حساب : $\int_1^2 \frac{Lnx}{x^2}dx$

لدينا : $\int_1^2 \frac{Lnx}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}Lnxdx$

بالتجزئة :

$$\int_1^2 g'(x).h(x)dx = [g(x)h(x)]_1^2 - \int_1^2 h'(x)g(x)dx$$

بوضع : $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ نجد : $g(x) = -\frac{1}{x}$

وبوضع : $h'(x) = \frac{1}{x}$ نجد: $h(x) = Lnx$

و عليه : $\int_1^2 \frac{1}{x^2}Lnxdx = \left[-\frac{1}{x}Lnx\right]_1^2 - \int_1^2 -\frac{1}{x^2}dx$

$$= \left[-\frac{1}{x}Lnx\right]_1^2 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= \left[-\frac{1}{x} Lnx - \frac{1}{x} \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2} Ln2 - \frac{1}{2} \right) - (0 - 1) \quad = -\frac{1}{2} Ln2 + \frac{1}{2}$$

و منه (1) تكافئ : $\alpha Ln2 + \alpha \left(-\frac{1}{2} Ln2 + \frac{1}{2} \right) = 1$

أي: $\frac{1}{2} \alpha Ln2 + \frac{1}{2} \alpha = 1$ و عليه : $\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} Ln2 \right) = 1$

و عليه : $\alpha = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} n^2}$ أي أن : $\alpha = \frac{2}{1 + Ln2}$

2 – حساب $E(Y)$ و $V(Y)$:

$$E(x) = \int_1^2 x f(x) dx = \alpha \int_1^2 \frac{x + Lnx}{x} dx$$

$$= \alpha \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} Lnx \right) dx$$

$$= \alpha \left[x + \frac{(Lnx)^2}{2} \right]_1^2 = \alpha \left[2 + \frac{(Ln2)^2}{2} \right] - \alpha \left[1 + \frac{(Ln1)^2}{2} \right]$$

$$= \alpha \left[2 + \frac{(Ln2)^2}{2} - 1 \right]$$

$$E(x) = \alpha \left(1 + \frac{(Ln2)^2}{2} \right)$$

$$E(x)=\frac{2}{1+Ln2}\times\left(1+\frac{(Ln2)^2}{2}\right)=\frac{2+(Ln2)^2}{1+Ln2}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\int_1^2 x^2 f(x)dx-\left[E(X)\right]^2$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\alpha\int_1^2 (x+Lnx)dx-\left[E(X)\right]^2$$

$$=\alpha\int_1^2 xdx+\alpha\int_1^2 Lnxdx-\left[E(X)\right]^2$$

لدينا : $\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{(2)^2}{2}-\frac{(1)^2}{2}=\frac{3}{2}$

نحسب بالتجزئة : $\int_1^2 Lnxdx$

لدينا : $\int_1^2 g'(x).h(x)dx=\left[g(x).h(x)\right]_1^2-\int_1^2 h'(x)g(x)dx$

بوضع : $g'(x)=1$ نجد $g(x)=x$

وبوضع : $h(x)=Lnx$ نجد $h'(x)=\frac{1}{x}$

و منه : $\int_1^2 Lnxdx=\left[xLnx\right]_1^2-\int_1^2 1.dx$

$$=\left[xLnx-x\right]_1^2=(2Ln2-2)-(1Ln1-1)$$

$$=2Ln2-1$$

و عليه :

$$V(X)=\frac{3}{2}\alpha+\alpha(2Ln2-1)-\frac{\left[2+(Ln2)^2\right]^2}{(1+Ln2)^2}$$

$$V(X)=\frac{1}{2}\alpha+2\alpha Ln2-\frac{\left[2+(Ln2)^2\right]^2}{(1+Ln2)^2}$$

$$V(X)=\frac{1}{1+Ln2}+\frac{4Ln2}{1+Ln2}-\frac{\left[2+(Ln2)^2\right]^2}{(1+Ln2)^2}$$

$$V(X)=\frac{1+Ln2+(4Ln2)(1+Ln2)-\left[2+(Ln2)^2\right]^2}{(1+Ln2)^2}$$

$$V(X)=\frac{1+Ln2+4Ln2+4(Ln2)^2-4-4(Ln2)^2-(Ln2)^4}{(1+Ln2)^2}$$

$$V(X)=\frac{-3+5Ln2-(Ln2)^4}{(1+Ln2)^2}$$

التمرين 12 .

1 – تعيين α بحيث تكون f كثافة احتمال .

الدالة f مستمرة على المجالين $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ **و** $\left]\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$

لندرس الاستمرارية عند $\frac{1}{2}$ **:**

$$\lim_{\substack{t\to\frac{1}{2}\\ >}} f(t)=\lim_{\substack{t\to\frac{1}{2}\\ >}}\alpha(1-t)=\frac{1}{2}\alpha$$

$$\lim_{\substack{t \to \frac{1}{2} \\ <}} f(t) = \lim_{\substack{t \to \frac{1}{2} \\ <}} \alpha t = \frac{1}{2}\alpha = \lim_{\substack{t \to \frac{1}{2} \\ <}} f(t)$$

و عليه f مستمرة عند $\frac{1}{2}$ و بالتالي f مستمرة على المجال $[0\ ;\ 1]$.

حتى تكون f موجبة على المجال $[0\ ;\ 1]$ يكفي أن يكون α موجبا

$\int_0^1 f(t)\,dt = 1$ و هو يكافئ : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt = 1$

و عليه : $\int_0^{\frac{1}{2}} \alpha\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\alpha - \alpha t)\,dt = 1$

و منه : $\left[\alpha \frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\alpha t - \frac{1}{2}\alpha t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = 1$

و عليه : $\frac{\alpha}{8} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{\alpha}{8}\right) = 1$

و بالتالي : $\frac{\alpha}{4} = 1$ و عليه : $\alpha = 4$

2 – احتمال أن تكون كمية الحرارة الناتجة عن التفاعل محصورة بين $0{,}1kcal$ و $0{,}6kcal$ هو :

$$p_X([0{,}1;0{,}6]) = \int_{0{,}1}^{0{,}6} f(t)\,dt = \int_{0{,}1}^{0{,}5} f(t) + \int_{0{,}5}^{0{,}6} f(t)\,dt$$

$$p_X([0{,}1;0{,}6]) = \int_0^{0{,}5} 4t\,dt + \int_{0{,}5}^{0{,}6} (4 - 4t)\,dt$$

$$= \left[2t^2\right]_0^{0{,}5} + \left[4t - 2t^2\right]_{0{,}5}^{0{,}6}$$

$$= 2(0,5)^2 + \left[4(0,6) - 2(0,6)^2\right] - \left[4(0,5) - 2(0,5)^2\right]$$

$$= 0,5 + 2,4 - 0,72 - 2 + 0,5 \quad = 0,65$$

3 – حساب متوسط كمية الحرارة الناتجة عن هذا التفاعل ، و هو الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = \int_0^1 t.f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t.f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t.f(t)\,dt$$

$$E(X) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4.t^2 dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(4t - 4t^2\right) dt$$

$$= \left[\frac{4}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[2t^2 - \frac{4}{3}t^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

و منه : $E(X) = \frac{1}{6} + 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = -1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

التمرين 13 .

1 – تعيين قانون إحتمال للمتغير العشوائي :

ليكن X المتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي تستقبل أول حافلة .

X متغير إحصائي مستمر ، و قيمه تتراوح بين 0 و 140 دقيقة .

ليكن α عدد حقيقي من المجال $[0\ ;\ 140]$

دالة الكثافة لقانون الاحتمال هي f حيث : $f(t) = \frac{1}{140 - 0}$

إذن : $f(t) = \frac{1}{140}$

ومنه : $p_X([0\ ;\ \alpha]) = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt \quad = \int_0^{\alpha} \frac{1}{140}\,dt = \left[\frac{1}{140}\alpha\right]_0^{\alpha}$

إذن : $p_X([0\ ;\ \alpha]) = \frac{\alpha}{140}$

2 – متوسط الفترة الزمنية التي ينتظر فيها هذا المسافر إقلاع الحافلة

هو الأمل الرياضي: $E(X)$

$$E(X) = \int_0^{140} t.f(t)dt = \int_0^{140} \frac{1}{140} tdt = \left[\frac{t^2}{280}\right]_0^{140}$$

حيث : $E(X) = \frac{(140)^2}{280} = \frac{(140)^2}{140\times 2} = \frac{140}{2} = 70Min$

3 – احتمال أن ينتظر هذا المسافر فترة زمنية تتعدى 50 دقيقة هو

$$p_X([50\ ;\ 140])$$

$$p_X([50\ ;\ 140]) = \int_{50}^{140} f(t)dt = \int_{50}^{140} \frac{1}{140}dx = \left[\frac{1}{140}x\right]_{50}^{140}$$

$$= \frac{140}{140} - \frac{50}{140} = \frac{90}{140} = \frac{9}{14}$$

إذن : $p_X([50\ ;\ 140]) = \frac{9}{14}$

التمرين 14 .

1 – بما أن المتغير العشوائي الذي تمت بواسطته نمذجة مدة الصلاحية يتبع القانون الأسي فإن

احتمال أن تكون مدة الصلاحية أصغر من 50 شهرا يعطى بالعبارة : $p_X([0\ ;\ 50])$

$$p_X([0\ ;\ 50]) = \int_0^{50} f(t)dt = \int_0^{50} 0,01.e^{-0,01}dt$$

$$\left[-e^{-0,01t}\right]_0^{50} = -e^{-0,01\times 50} + e^{-0,01\times 0}$$

$$= 1 - 0,6 \simeq 0,4$$

2 – احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب أكبر 50 شهرا .

$$p_X\left(\left[50\ ;\ +\infty\right[\right)=\lim_{x\to+\infty}\int_{50}^{x}0,01e^{-0,01t}dt$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-0,01t}\right]_{50}^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-0,01x}+e^{-0,5}\right]$$

$$=e^{-0,5}\ =0,606$$

التمرين 15 .

1) التجربة هي لبرنولي لأنه فيها ربح في حالة سحب كرية رقمها من مضاعفات 5 وخسارة في حالة سحب كرية رقمها ليس من مضاعفات 5 .

2) احتمال الربح :

لدينا 10 كريات تحمل أرقاما من مضاعفات 5 من بين 50 كرية

و عليه : $p=\dfrac{10}{50}=0,2$

احتمال الخسارة : $1-p=1-0,2=0,8$

3) وسيط المتغير العشوائي هو $0,2$

4) قانون المتغير العشوائي هو :

X_i	1	0
$p_X\left(X_i\right)$	$0,2$	$0,8$

$$E\left(X\right)=1\times0,2=0,2$$

$$\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)=0,2\times0,8=1,6$$

$\sigma\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{V}\left(\mathrm{X}\right)}=\sqrt{1,6}$ وبالتالي : $\sigma\left(X\right)\simeq1,26$

التمرين 16 .

بما أن القطعة متوازنة فإن : $p\left(A\right)=p\left(B\right)=0,5$ و منه التجربة العشوائية تتبع قانون ثنائي الحد للوسيطين : $0,5$ و 20 .

و عليه قانون الاحتمال يعطى بالعبارة : $p_X(k)=C_{20}^{k}(0,5)^{k}.(0,5)^{20-k}$ مع $k\in\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,...,20\}$

1 – حساب احتمال أن يربح هذا التلميذ 6 نقط .

حتى يربح هذا التلميذ 6 نقط خلال 20 رمية يجب أن يظهر A : 12 مرة

و منه الاحتمال هو $p_X(12)$ حيث :

$$p_X(12)=C_{20}^{12}.(0,5)^{12}\times(0,5)^{8}=\frac{20!}{8!.12!}\times(0,5)^{20}$$

$$p_X(12)\simeq 0,009$$

2- حساب احتمال أن يربح هذا التلميذ 10 نقط :

حتى يربح هذا التلميذ 10 نقط يجب أن يظهر A : في كل المرات

(أي 20 مرة) خلال التجربة .

و الاحتمال هو $p_X(20)$ حيث :

$$p_X(20)=C_{20}^{20}.(0,5)^{20}\times(0,5)^{0}=1.(0,5)^{20}$$

$$p_X(20)\simeq 0,000000953$$

التمرين 17 .

حساب p_k :

لدينا احتمال أن يختار هذا الشخص منتوج الشركة هو $0,6$

و عليه احتمال أن لا يختار هذا المنتوج هو $0,4$ و منه هذه التجربة هي لبرنولي و هي مكررة 10 مرات .

و عليه قانون الاحتمال p_x هو قانون ثنائي الحد للوسيطين 10 و $0,4$

و عليه احتمال أن نجد : k شخص من بين 10 أشخاص الذين تم استجوابهم يختارون إنتاج الحواسيب لدى هذه الشركة هو :

$$p_k=C_{10}^{k}.(0,4)^{k}.(0,6)^{10-k}$$ حيث : $k\in\{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,...,10\}$

- احتمال أن يختار 3 أشخاص من بين الذين تم استجوابهم الحواسيب المنتجة لدى هذه الشركة هو :

$$p_3 = C_{10}^3.(0,4)^3.(0,6)^7$$

$p_3 \simeq 0,21$: و منه $p_3 = 120 \times 0,064 \times 0,0279936$

التمرين 18 .

1 – قانون الاحتمال الذي نفترضه لنمذجة هذه الفرضية هو قانون

توزيع منتظم على المجموعة $\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\}$

حيث : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{5}$

أي أن احتمالات الإقبال على المكتبة خلال أيام الأسبوع متساوية .

2 – الطريقة التي نقترحها لمحاكاة السلسلة هي محاكاة سلسلة أعداد

من المجموعة $\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\}$ بجدول أو آلة بيانية ، و ذلك

للحصول على أعداد عشوائية محصورة بين 1 و 5 .

3 – حساب d^2 :

$$d^2 = \sum_{i=1}^{i=5} (f_i - p_i)^2$$

لدينا : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{5} = 0,2$

$$f_1 = \frac{220}{1000} = 0,22 \quad , \quad f_2 = \frac{210}{1000} = 0,12$$

$$f_3 = \frac{200}{1000} = 0,20 \quad , \quad f_4 = \frac{190}{1000} = 0,19$$

$$f_5 = \frac{180}{1000} = 0,18$$

إذن : $d^2 = (0,22 - 0,20)^2 + (0,21 - 0,20)^2 + (0,20 - 0,20)^2$

$$+(0,19 - 0,20)^2 + (0,18 - 0,20)^2$$

$$d^2 = (0,02)^2 + (0,01)^2 + 0^2 + (0,01)^2 + (0,02)^2$$

و منه : $d^2 = 0,001$

3 – نعم القاعدة صحيحة لأن : $d^2 \leq D_9$

التمرين 19 .

ليكن X المتغير العشوائي المرفق بهذه التجربة أي بمدة انشطار النواة:

لدينا : $p([a\ ;\ b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$

و بما أ، احتمال أن تعيش النواة المنشطرة بين 0 و 100 هو $0,048$

فإن : $p([0\ ;\ 100]) = 0,048 \quad ...(1)$

و من جهة أخرى : $p([0\ ;\ 100]) = \int_0^{100} \lambda e^{-\lambda t} dt$

و عليه : $p([0\ ;\ 100]) = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{100} = -e^{-100\lambda} + e^0$

$$p([0\ ;\ 100]) = 1 - e^{-100\lambda} \quad ...(2)$$

من (1) و (2) ينتج : $1 - e^{-100\lambda} = 0,048$

إذن : $e^{-100\lambda} = 0,952$ و منه : $lne^{-100\lambda} = ln0,952$

أي أن : $-100\lambda = Ln0,952$ و عليه : $\lambda = \dfrac{Ln0,952}{-100}$

و منه : $\lambda \simeq 0,00049$

و بالتالي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X معرفة بالعبارة :

$$f(t) = 0,00049e^{-0,00049t}$$

2- احتمال أن يتم انشطار النواة في أقل من 180 سنة :

$$p([0\ ;\ 180]) = \int_0^{180} 0,00049e^{-0,00049t} dt$$

$$p([0\ ;\ 180]) = 1 - e^{-0,00049\times 180} = 1 - e^{-0,0882} \simeq 0,084$$

3 – احتمال أن يكون الانشطار على الأقل في 180 سنة .

الحادثة أن يكون الانشطار على الأقل في 180 سنة هي الحادثة العكسية للحادثة التي تشترط في أقل من 180 سنة .

هو :
$$p\left(\left[180\ ;\ +\infty\right[\right)=1-p\left(\left[0\ ;\ 180\right]\right)$$
$$=1-0,084$$
$$=0,916$$

4 – حساب المدة المتوسطة للانشطار النووي :

و هي :
$$E\left(X\right)=\frac{1}{\lambda}\simeq\frac{1}{0,00049}$$

إذن :
$$E\left(X\right)\simeq 2040$$

و منه المدة المتوسطة للانشطار النووي هو 2040 .