# الاحتمالات الشرطية؛استقلال الأحداث

الكفاءات المستهدفة :

- 1- إيجاد قانون احتمال لمتغير عشوائي
- 2- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية، قانون احتمالها ، التباين ، الانحراف المعياري ، الأمل الرياضياتي
- 3- تنظيم معطيات من أجل عدها .
- 4- استخراج قوانين التحليل التوفيقي : القوائم – الترتيبات– التبديلات– التوفيقات
- 5- حل مسائل في العد باستعمال قوانين التحليل التوفيقي .
- 6- التعرف على استقلال أو ارتباط حادثتين
- 7- توظيف شجرة الاحتمالات لحل مسائل في الاحتمالات الشرطية
- 8- حل مسائل في الاحتمالات الشرطية باستعمال قوانين التحليل التوفيقي
- 9- توظيف دستور الاحتمالات الكلية
- نمذجة وضعيات بالاعتماد على التجارب المرجعية للسحب أو الإلقاء

## تصميم الدرس

### أنشطة

I - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية ( مراجعة ) .

II - العد :

III - الاحتمالات الشرطية :

VI - دستور الاحتمالات الكلية :

تمـارين و مشكلات

الحـلـــول

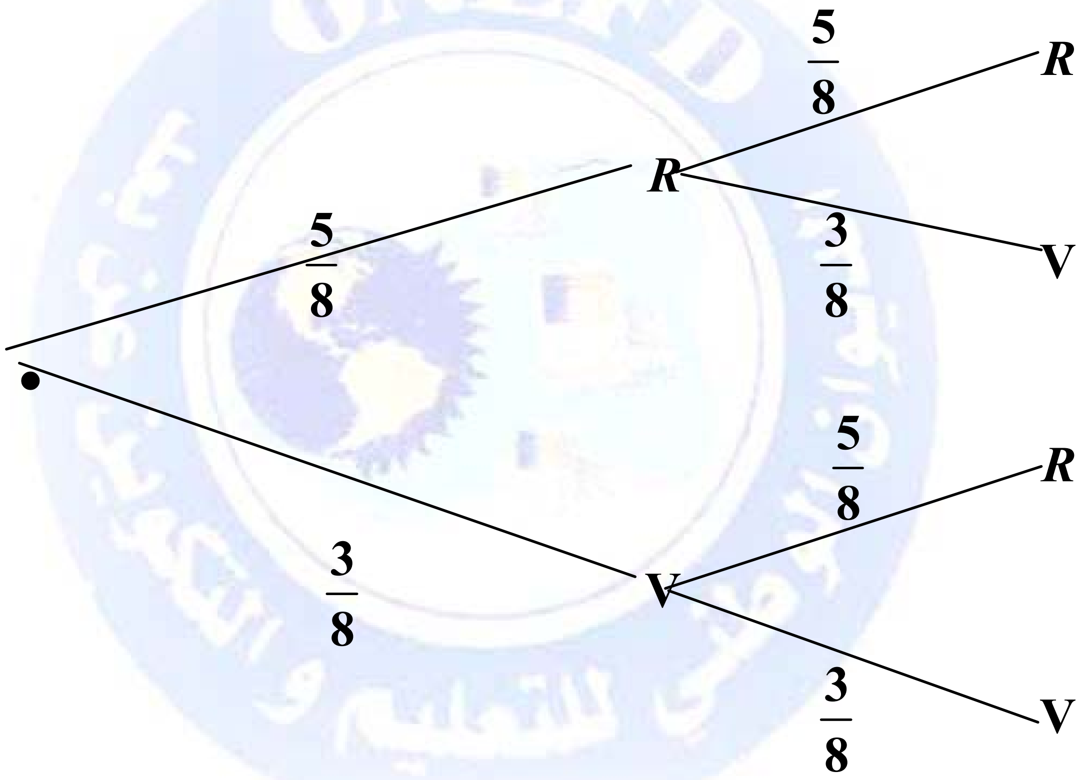
# أنشطة

النشاط :

يحتوى كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء . نسحب من الكيس كريتان على التوالي بحيث : بعد كل سحب نعيد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة هذه التجربة العشوائية .

ما احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون ؟ ما احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني .




السحبة 1 السحبة 2

توضيح حول الشجرة:

السحبة 1:

عند سحب كرة من الكيس نحصل إما على كرة حمراء $R$ أو كرة خضراء $\mathrm{V}$ كما هو موضح على الشجرة و لدينا : $p(\mathrm{R})=\dfrac{5}{8}$

( نسحب 5 كرات حمراء من بين 8 كرات )

و لدينا : $p(\mathrm{V})=\dfrac{3}{8}$ ( نسحب 3 كرات خضراء من بين 8 كرات )

السحبة 2 :

بعد سحب الكرة الأولى من الكيس ثم إعادتها للكيس نسحب كرة أخرى .

فإذا كانت الكرة المسحوبة في أول سحبة هي $R$ فإن السحبة الثانية هي إما $R$ أو $\mathrm{V}$ كما يظهر على الشجرة و لدينا : $p_R(\mathrm{R})=\dfrac{5}{8}$

أي احتمال ظهور $R$ علما أننا تحصلنا على $R$ في السحبة 1 .

و لدينا : $p_R(\mathrm{V})=\dfrac{3}{8}$ أي احتمال ظهور $\mathrm{V}$ علما أننا تحصلنا على $R$ في السحبة 1 .

و نفس الشيء إذا كانت السحبة الأولى هي $\mathrm{V}$ فلدينا $R$ أو $\mathrm{V}$ في السحبة الثانية .

- احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون أي $(R;R)$ أو $(\mathrm{V};\mathrm{V})$

و ليكن $p_1$ : $p_1=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{34}{64}=\dfrac{17}{32}$

و ليكن $p_2$ : $p_2=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{24}{64}=\dfrac{3}{8}$

## I - الاحتمالات المتساوية على مجموعة منتهية ( مراجعة ) .

### 1 – مصطلحات :

- نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة . نسمي مجموعة النتائج الممكنة بمجموعة الإمكانيات و نرمز لها بالرمز $\Omega$ .
- كل جزء $A$ من $\Omega$ يسمى حادثة .
- إذا احتوت المجموعة الجزئية $A$ من $\Omega$ على عنصر وحيد فإنها تدعى حادثة أولية .
- الحادثة الأكيدة هي $\Omega$ و الحادثة المستحيلة هي $\varnothing$ .
- إذا كانت $A$ حادثة فإن حادثتها العكسية هي $\overline{A}$ و هي التي تحتوي على كل عناصر $\Omega$ ما عدا عناصر $A$ .
- لتكن $A$ و $B$ حادثتان، نرمز بـ $A \cap B$ للحادثة $A$ و $B$ و هي التي تحتوى على كل عناصر $\Omega$ و التي تنتمي إلى كل من $A$ و $B$ معا .

إذا كانت $A \cap B$ خالية أي $A \cap B = \varnothing$ نقول عندئذ أن الحادثتين $A$ و $B$ غير متلائمتين . نرمز بالرمز $A \cup B$ للحادثة $A$ أو $B$ و هي التي تحتوى على عناصر $A$ و عناصر $B$ أيضا .

### 2 – قانون الاحتمال :

لتكن $\Omega$ مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية حيث : $\Omega = \{e_1;e_2;...;e_i\}$ حيث : $e_1;e_2;...;e_i$ هي إمكانيات هذه التجربة و تسمى أيضا مخارج .

قانون الاحتمال $p$ للتجربة العشوائية هو إرفاق بالعناصر $e_1;e_2;...;e_n$ أعدادا حقيقية موجبة $p_1;p_2;...;p_n$ تسمى احتمالات المخارج $e_1;e_2;...;e_n$ على الترتيب .

و يكون قانون الاحتمال معرف بالجدول :

| قيم $\Omega$ | $e_1$ | $e_2$ | ... | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|
| الاحتمالات | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

ملاحظة 1 :

بما أن كل عدد من الأعداد $p_1 ; p_2 ; ... ; p_n$ موجب فهو أصغر من المجموع 1 و منه :

$0 \le p_i \le 1$ من أجل $1 \le i \le n$

ملاحظة 2 :

نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات $\Omega$ و قانون احتمال $p$ على $\Omega$ .

### 3 – تساوي الاحتمال :

نقول عن تجربة أنها مساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال .

نقول عندئذ أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع . فإذا كانت $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; ... ; e_n\}$ مجموعة الإمكانيات و كانت $p_1 ; p_2 ; ... ; p_n$ احتمالات المخارج $e_1 ; e_2 ; ... ; e_n$ على الترتيب فإن : $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$

إذا كانت $A$ حادثة تحتوي على $m$ عنصرا يكون احتمالها $p(A)$

حيث: $p(A) = m.\frac{1}{n}$ أي : $p(A) = \frac{m}{n}$

ملاحظة 3 :

بما أن : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ فإن : $p(\Omega) = 1$

و نضع : $p(\varnothing) = 0$ .

خواص الاحتمالات :

لتكن $\Omega$ مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية نزود $\Omega$ بالاحتمال $p$ .

- من أجل كل حادثة $A$ فإن : $0 \le p(A) \le 1$
- إذا كانت $A$ و $B$ حادثتين غير متلائمتين $(A \cap B = \varnothing)$ فإن : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- إذا كانت $A$ و $B$ حادثتين كيفيتين فإن :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- إذا كانت $A$ الحادثة العكسية للحادثة $A$ فإن : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

- $p(\Omega) = 1$ و $p(\varnothing) = 0$

- إذا كانت الحادثة $A$ جزءا من الحادثة $B$ $(A \subset B)$

فإن: $p(A) \leq p(B)$ .

تعار يف :

$\Omega$ مجموعة الامكانيات لتجربة عشوائية حيث : $\Omega = \{e_1;e_2;...;e_n\}$ . $p$ احتمالا معرفا على $\Omega$ ، $p_1;p_2;...;p_n$

احتمالات المخارج $e_1;e_2;...;e_n$ على الترتيب .

- أمل قانون الاحتمال هو العدد $E$ حيث :

$$E = e_1.p_1 + e_2.p_2 + ... + e_n.p_n$$

- تباين قانون الاحتمال هو العدد $\text{V}$ حيث :

$$\text{V}=(e_1 - E)^2.p_1 + (e_2 - E)^2.p_2 + ... + (e_n - E)^2.p_n$$

- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد $S$ حيث : $S = \sqrt{\text{V}}$

و يمكن كتابة $\text{V}$ على الشكل :

$$\text{V} = e_1^2.p_1 + e_2^2.p_2 + ... + e_n^2.p_n - E^2$$

ملاحظة :

الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا أن قيم الطبع هي عناصر $\Omega$ و التوترات النظرية هي القيم $p_i$

5 – المتغير العشوائي :

تعريف 1 :

$\Omega$ مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية . $p$ احتمال معرف على $\Omega$ .

نسمي متغيرا عشوائيا $\text{X}$ كل دالة عددية معرفة على $\Omega$ .

تعريف 2 :

$X$ متغير عشوائي معرفة على $\Omega$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية .و لتكن $I$ مجموعة قيم $X$ أي : $I=\{x_1;x_2;...;x_n\}$

و ليكن $p_i$ احتمال الحادثة " $X$ يأخذ القيمة $x_i$ " أي $(X = x_i)$

حيث لدينا : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

قانون احتمال للمتغير العشوائي $X$ هو الدالة المعرفة على $I$ و التي ترفق بكل قيمة $x_i$ من $I$ العدد $p(X = x_i)$

تعريف 3 :

- الأمل الرياضياتي للمتغير $X$ هو العدد $E(X)$

حيث : $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + .......... + x_np_n$

- التباين للمتغير $X$ هو العدد $V(X)$ حيث

$$V(X)=(x_1-E(X))^2 p_1+(x_2-E(X))^2 p_2+...+(x_n-E(X))^2 p_n$$

- الانحراف المعياري للمتغير $X$ هو العدد $\sigma(X)$ حيث: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- و يمكن كتابة : $V(X) = e_1^2 p_1 + e_2^2 p_2 + ....... + e_n^2 p_n - (E(X))^2$

حيث : $p_i = p(X = x_i)$ من أجل $i \in \{1,2,......,n\}$

تطبيق 1:

نقذف نردا ( أو زهر النرد ) غير مزيف وجوهه مرقمة من 1 إلى 6

و نراقب الوجه العلوي الذي يظهر عند وقوعه على الأرض .

- ماذا نسمى هذه التجربة ؟ ما هي مجموعة الإمكانيات ؟
- عين الحوادث الأولية . عين حادثتين عكسيتين ؟
- ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي . و ما هو احتمال الحصول على عدد فردي .
- عين قانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائية .
- احسب كل من أمل قانون الاحتمال ، تباين قانون الاحتمال ، الانحراف المعياري لقانون الاحتمال .

الحل :

- نسمى هذه التجربة : تجربة عشوائية .

- مجموعة الإمكانيات : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- الحوادث الأولية هي : $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

- الحادثتين $\{1;5\}$ و $\{2;3;4;6\}$ هما حادثتين عكسيتين .

- لتكن $A$ الحادثة المعرفة بظهور عدد زوجي أي $A = \{2;4;6\}$

لدينا : $p(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

لتكن $B$ الحادثة المعرفة بظهور عدد فردي أي $B = \{1;3;5\}$

و عليه $B$ الحادثة العكسية للحادثة $A$

و منه : $p(B) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

- تعيين قانون الاحتمال : احتمال كل وجه هو : $\dfrac{1}{6}$ و عليه قانون الاحتمال يعرف كما يلي :

| قيم $\Omega$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمالات | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

- أمل قانون الاحتمال :

$$E = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6}$$

و منه : $E = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}$ .

- تباين قانون الاحتمال :

$$V = \frac{1}{6}\left(1-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(3-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(4-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(5-\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(6-\frac{7}{2}\right)^2$$

و منه : $V = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{25}{4} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{25}{4}\right)$

إذن : $V = \frac{1}{6} \times \frac{70}{4}$ أي : $V = \frac{35}{12}$ .

- الانحراف المعياري لقانون الاحتمال : $S = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{35}{12}}$

إذن : $S \simeq 3,42$

تطبيق 2 :

يحتوى كيس على 4 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء و 8 كريات صفراء و 5 كريات خضراء .
نسحب بلا اختيار كرة من الكيس .
لتكن الدالة $X$ التي ترفق بكل كرة بيضاء العدد 2 و بكل كرة حمراء
العدد -3 و بكل كرة صفراء العدد 1 و بكل كرة خضراء العدد -1 .
إن $X$ هو متغيرا عشوائيا .
- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ .
- احسب كل من الأمل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$ .

الحل :

- تعين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ :

احتمال الحصول على كرة بيضاء هو : $p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

احتمال الحصول على كرة حمراء هو : $p_2 = \frac{3}{20}$

احتمال الحصول على كرة صفراء هو: $p_3 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

احتمال الحصول على كرة خضراء هو : $p_4 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

و يكون قانون الاحتمال كما يلي :

| قيم $X$ | 2 | -3 | 1 | -1 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{5}{20}$ |

- الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$ :

$$E(X)=2\times\frac{4}{20}+(-3)\times\frac{3}{20}+1\times\frac{8}{20}+(-1)\times\frac{5}{20}$$

و منه : $E(X)=\frac{8-9+8-5}{20}=\frac{2}{20}$ إذن : $E(X)=0,1$

- التباين للمتغير العشوائي $X$ :

$$V(X)=\frac{4}{20}(2-0,1)^2+\frac{3}{20}(-3-0,1)^2+\frac{8}{20}(1-0,1)^2+\frac{5}{20}(-1-0,1)^2$$

$$V(X)=\frac{4}{20}\times3,61+\frac{3}{20}\times9,61+\frac{8}{20}\times0,81+\frac{5}{20}\times1,21$$

و منه : $V(X)=\frac{55,8}{20}$ أي : $V(X)=2,79$ .

- الانحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$:

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2,79}$ و منه : $\sigma(X)\simeq1,67$

## II - العد :

### 1 – المبدأ الأساسي للعد :

إذا كان هناك إجراء معين يتم بـ : $n_1$ طريقة و إجراء ثان يتم بـ $n_2$ طريقة ، ... ، ثم إجراء من رتبة $k$ يتم ب $n_k$ طريقة فإن هذه الإجراءات تتم على التتابع بـ $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طريقة .

مثال :

يقدم مطعم 3 أصناف من اللحم و صنفين من الحساء و 4 أصناف من الفاكهة .

- ما هو عدد الوجبات التي يمكن للمطعم تقديمها إذا كانت كل وجبة مكونة من لحم و حساءات و فاكهة .

الحل :

- لدينا 3 طرائق لتقديم اللحم و طريقتين لتقديم الحساء و 4 طرائق لتقديم الفاكهة .

و حسب المبدأ الأساسي للعدد فإن عدد الطرائق التي يقدم بها المطعم الوجبات للزبائن هو : $4 \times 2 \times 3$ أي أن هناك 24 وجبة ممكنة .

### 2 – القوائم :

مثال :

كم عددا مكونا من 3 أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 2 ، 3 ، 4 ، 5

الحل :

كل عدد مكونا من 3 أرقام هو من الشكل $abc$ . لدينا : 4 إمكانيات أو طرائق لاختيار رقم الآحاد $c$ و 4 إمكانيات لاختيار رقم العشرات $b$

و 4 إمكانيات لاختيار رقم المئات $a$

و حسب المبدأ الأساسي للعد لاختيار هذه الأرقام على التتابع لدينا : $4 \times 4 \times 4$ إمكانية أي $4^3$ طريقة .

و منه عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو 64 عددا .

تعريف :

$n$ و $p$ عددان طبيعيان غير معدومين $E$ مجموعة ذات $n$ عنصرا .

كل عنصر من الشكل $\left(a_1,a_2,...,a_p\right)$ يسمى قائمة ذات $p$ عنصراً من المجموعة $E$ حيث : $a_1,a_2,...,a_p$ هي عناصرمن $E$ ليست جميعها مختلفة .

عدد القوائم :

لتكن القائمة $\left(a_1,a_2,...,a_p\right)$ . لدينا $n$ طريقة لاختيار العنصر $a_1$ من $E$ و لدينا $n$ طريقة لاختيار العنصر $a_2$ من $E$ ... و لدينا $n$ طريقة لاختيار العنصر $a_p$ من $E$ . و عليه اختيار العناصر $a_1,a_2,...,a_p$ يتم على التتابع بـ : $n\times n\times ...\times n$ أي : عدد القوائم ذات $p$ عنصراً من المجموعة $E$ ذات $n$ عنصر هو $n^p$ .

مثال :

كم عددا مكونا من 6 أرقام يمكن تشكيله باستخدام الأعداد $9,.....2,1$

الحل :

عدد الأعداد هو $9^6$ أي : $531441$ عددا

3 – الترتيبات :

تعريف :

$n$ و $p$ عددان طبيعيان حيث : $p\leq n$ . نسمى ترتيبه ذات $p$ عنصرا من مجموعة ذات $n$ عنصرا كل قائمة ذات $p$ عنصرا متمايزة مثنى مثنى .

عدد الترتيبات :

لتكن الترتيبة $\left(a_1,a_2,...,a_p\right)$ .

لدينا $n$ طريقة لاختيار العنصر $a_1$ من $E$

و لدينا $n-1$ طريقة لاختيار العنصر $a_2$ من $E$ ( عدم التكرار )

و لدينا $n-2$ طريقة لاختيار العنصر $a_3$ من $E$

$\vdots$

و لدينا $n-\left(p-1\right)$ طريقة لاختيار العنصر $a_p$ من $E$

و حسب المبدأ الأساسي للعدد عدد الطرائق لاختيار العناصر $a_1,a_2,...,a_p$ بهذا الترتيب هو : $n\left(n-1\right)\left(n-2\right)...\left(n-p+1\right)$ و نرمز له بالرمز $A_n^p$ و عليه عدد الترتيبات : $A_n^p=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\times ...\times\left(n-p+1\right)$

مثال :

كم عددا مكونا من 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى أي غير مكررة يمكن تكوينها باستخدام الأعداد 1 ، 2 ، ... ، 9 .

الحل :

كل عدد يكون من الشكل : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$

عدد إمكانيات اختيار $a_6$ هو 9 عدد إمكانيات اختيار $a_5$ هو 8

عدد إمكانيات اختيار $a_4$ هو 7 عدد إمكانيات اختيار $a_3$ هو 6

عدد إمكانيات اختيار $a_2$ هو 5 عدد إمكانيات اختيار $a_1$ هو 4 .

و عليه عدد الأعداد التي يمكن تشكيلها هو : $4\times5\times6\times7\times8\times9$

أي : 60480 عددا .

4 – التبديلات :

تعريف :

$n$ عدد طبيعي غير معدوم . نسمي تبديلة المجموعة $E$ ذات $n$ عنصراً كل ترتيبة ذات $n$ عنصرا من $E$ .

عدد التبديلات هو: $A_n^n = n(n-1)(n-2)...(n-n+1)$

إذن : $A_n^n = n(n-1)(n-2)\times...\times1$

مثال :

كم عددا مكونا من 9 أرقام يمكن تشكيله باستخدام الأعداد 1 ، 2 ، ... ، 9 دون تكرار أرقام هذا العدد .

الحل :

عدد الأعداد هو : $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9$

أي : 362880 عددا .

الرمز عاملي :

العدد $1\times2\times...\times(n-2)(n-1)n$ يرمز له بالرمز $n!$ و نكتب :

$$n! = n(n-1)\times...\times2\times1$$

الرمز $n!$ يقرأ : $n$ عاملي .

فمثلا :

$$4! = 4\times3\times2\times1 = 24 \quad ، \quad 6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1$$

اصطلاحا : $1! = 1$ و $0! = 1$

و منه : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ و $A_n^n = n!$

مثال :

$$A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!}$$

و عليه: $A_9^6 = 9\times8\times7\times6\times5\times4$ أي: $A_9^6 = 60480$

5 – التوفيقات :

تعريف :

$n$ و $p$ عددان طبيعيان ( $p \le n$ ). لتكن $E$ مجموعة ذات $n$ عنصرا . نسمي توفيقة ذات $p$ عنصرا من $E$ كل جزء من $E$ يشمل $p$ عنصرا من $E$ .

عدد التوفيقات :

يعطي عدد التوفيقات ذات $p$ عنصرا من $E$ بالعبارة : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

أي : $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\times p!}$

لأن الجزء لا ترتب عناصره و لا تكرر .

ملاحظة :

نرمز لعدد التوفيقات بالرمز : $C_n^p$ أو $\dbinom{n}{p}$

مثال :

يتكون قسم دراسي من 40 تلميذا . أرادوا اختيار 3 ممثلين للقسم .

بكم طريقة يتم اختيارهم .

الحل :

إن اختيار 3 ممثلين هو اختيار جزء مكون 3 عناصر من 40 عنصر . و عليه عدد الطرائق هو :

$$C_{40}^{3}=\frac{40\times39\times38\times37!}{37!\times3\times2\times1}$$

$$C_{40}^{3}=\frac{40\times39\times38}{3\times2}=20\times13\times38=9880$$

إذن هناك 9880 طريقة لاختيار 3 ممثلين لهذا القسم .

خواص $C_n^p$ :

لدينا الخواص التالية للعدد $C_n^p$ :

$$C_n^0=1 \quad ; \quad C_n^1=n \quad ; \quad C_n^n=1 \quad ; \quad C_n^p=C_n^{n-p}$$

$$C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{p}$$

و يمكن البرهان عليها باستخدام التعريف : $C_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

أمثلة :

$$C_7^7=1 \qquad C_5^1=5 \qquad C_4^0=1$$

$$C_5^2=C_5^3 \qquad C_8^4=C_7^3+C_7^4$$

المثلث العددي :

و يعتمد في حساب $C_n^p$ على الخواص الخمسة السابقة :

| $n$ \ $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | $p$-1 | $p$ | ... | $n$-1 | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | | | | | | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | **1** | **3** | **3** | **1** | **0** | | | | | **0** |
| ⋮ | | | | | | | | | | |
| $p$-1 | **1** | | | | | **1** | **0** | | | **0** |
| $p$ | **1** | | | | | | **1** | | | **0** |
| ⋮ | | | | | | | | | | |
| $n$-1 | **1** | | | | | $C_{n-1}^{p-1}$ | $C_{n-1}^{p}$ | | **1** | **0** |
| $n$ | **1** | | | | | | $C_n^p$ | | | **1** |

- العمود الأول لهذا المثلث مكون من أعداد كل منها يساوي 1 و ذلك من $C_n^0 = 1$ .

- قطر المثلث مكون من أعدادا يساوي كل منها 1 و ذلك من $C_n^n = 1$ .

- أما الأعداد الأخرى داخل المثلث فكل عدد $C_n^p$ هو مجموع العدد $C_{n-1}^p$ الذي يقع فوقه و العدد $C_{n-1}^{p-1}$ الذي يلي العدد $C_{n-1}^p$ من اليمين .

و ذلك من الخاصية $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

- أما الأعداد الخارجة من المثلث فمعدومة $p > n$ , $C_n^p = 0$

مثال :

$n = 5$

| $p$ \ $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **2** | **1** | **2** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| **3** | **1** | **3** | **3** | **1** | **0** | **0** |
| **4** | **1** | **4** | **6** | **4** | **1** | **0** |
| **5** | **1** | **5** | **10** | **10** | **5** | **1** |

دستور ثنائي الحد :

إذا كان $a$ و $b$ عددان طبيعيان و $n$ عدد طبيعي غير معدوم فإن:

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots\ldots + C_n^n a^{n-n} b^n$$

إذن : $\left(a+b\right)^n = \sum_{i=0}^{i=n} C_n^i \; a^{n-i} b^i$ و يسمى دستور ثنائي الحد .

مثال :

$$\left(x+2\right)^5 = C_5^0 x^{5-0}\left(2\right)^0 + C_5^1 x^{5-1} 2^1 + C_5^2 x^{5-2} 2^2 + C_5^3 x^{5-3} 2^3 + C_5^4 x^{5-4} 2^4 + C_5^5 x^{5-5} 2^5$$

و منه: $\left(x+2\right)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

الأعداد $C_5^5, C_5^4, C_5^3, C_5^2, C_5^1, C_5^0$ تستخرج باستعمال المثلث العددي .

## III - الاحتمالات الشرطية :

- الأحداث المستقلة :

تمهيد :

لتكن $\Omega$ مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية .

$p$ احتمال معرف على $\Omega$، $A$ و $B$ حادثتان حيث : $p\left(A\right) \neq 0$

تعريف 1 :

نسمي احتمال الحادثة $B$ علما أن الحادثة $A$ محققة العدد $p_A\left(B\right)$

و هو معرف بالعبارة : $p_A\left(B\right) = \dfrac{p\left(A \cap B\right)}{p\left(A\right)}$

- من التعريف لدينا : $p_A\left(\Omega\right) = \dfrac{p\left(\Omega \cap A\right)}{p\left(A\right)} = \dfrac{p\left(A\right)}{p\left(A\right)} = 1$

- إذا كانت $B_1 , B_2$ حادثتان غير متلائمتين فإن :

$$p_A\left(B_1 \cup B_2\right) = p_A\left(B_1\right) + p_A\left(B_2\right)$$

$$p\left(A \cap B\right) = p\left(B\right) \times p_B\left(A\right) = p\left(A\right) \times p_A\left(B\right)$$

تعريف 2 :

نقول عن حادثتين $A$ و $B$ أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كانت :

$$p_A\left(B\right) = p\left(B\right) \quad \text{أي:} \quad p\left(A \cap B\right) = p\left(A\right).p\left(B\right)$$

مبرهنة :

إذا كانت $A$ و $B$ حادثتين مستقلتين فإن $A$ و $\overline{B}$ مستقلتين .

تطبيق 1 :

يحتوي كيس على 6 قريصات مرقمة من 1 إلى 6 نسحب من الكيس قريصتين في آن واحد .

- احسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 7 .
- احسب احتمال سحب قريصتين مجموعهما 7 و علما أن فرقهما 3 .

الحل :

- عدد إمكانيات سحب قريصتان في آن واحد من الكيس هو عدد التوفيقات ذات عنصرين من مجموعة ذات 6 عناصر و عددها :

$$C_6^2 = \frac{6!}{\left(6-2\right)! \times 2!} = 15$$

لتكن $A$ الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 7

$A = \left\{\left\{1,6\right\},\left\{2,5\right\},\left\{3,4\right\}\right\}$ و منه عدد إمكانياتها هو 3 .

و منه : $P\left(A\right) = \frac{3}{15}$ أي : $P\left(A\right) = \frac{1}{3}$

-2 لتكن $B$ الحادثة المعرفة بالفرق بين الرقمين يساوي 3

$B = \left\{\left\{1,4\right\},\left\{2,5\right\},\left\{3,6\right\}\right\}$ ؛ $A \cap B = \left\{\left\{2,5\right\}\right\}$

احتمال الحصول على $B$ علما أن $A$ محققة هو :

$P_A\left(B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(A\right)}$ ولدينا مما سبق : $P\left(A\right) = \frac{1}{3}$

و لدينا : $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$

و عليه : $P_A(B)=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{15}\times\frac{3}{1}=\frac{1}{5}$

إذن احتمال سحب رقمين مجموعهما 7 علما أن فرقهما 3 هو $\frac{1}{5}$

تطبيق 2 :

يحتوي وعاء على 4 كرات صفراء و 8 كرات خضراء

نسحب كريتيين ( على التوالي و بدون إعادة )

1- احسب احتمال الحصول على كرة صفراء ثم كرة خضراء .

- احسب احتمال الحصول على كرة خضراء ثم كرة صفراء .

- احسب احتمال الحصول على اللونين معا.

2- استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعية السابقة و حساب الاحتمالات .

الحل :

1- نفرض $J_1$ حادثة الحصول على كرة صفراء في أول سحب

و $V_2$ حادثة الحصول على كرة خضراء في أول سحب

و $J_2$ حادثة الحصول على كرة صفراء في ثاني سحب

و نفرض $V_2$ حادثة الحصول على كرة خضراء في ثاني سحب

$$P\left(J_1 \cap \mathrm{V}_2\right) = P\left(J_1\right).P_{J_1}\left(\mathrm{V}_2\right) = \frac{4}{12} \times \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$$

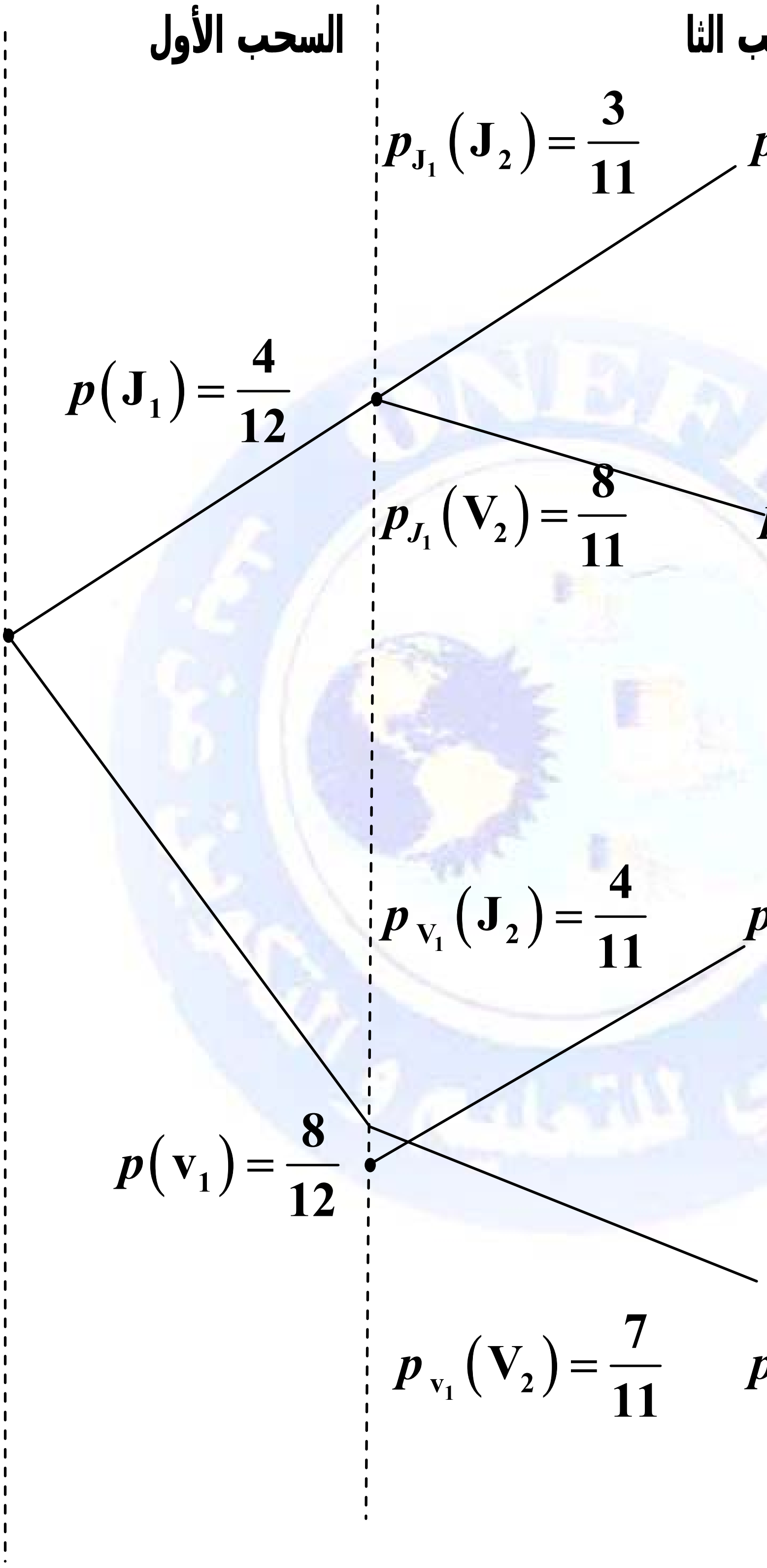
$$P\left(\mathrm{V}_1 \cap J_2\right) = P\left(\mathrm{V}_1\right).P_{\mathrm{V}_1}\left(J_2\right) = \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{33}$$

$$P\left(J_1 \cap J_2\right) + P\left(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2\right) = P\left(J_1\right).P_{J_1}\left(J_2\right) + P\left(\mathrm{V}_1\right).P_{\mathrm{V}_1}\left(\mathrm{V}_2\right)$$

$$= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{11}$$

$$= \frac{1}{11} + \frac{14}{33} = \frac{17}{33}$$

2- نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :




$$p(J_1\cap J_2)=p(J_1)\times p_{J_1}(J_2)$$
$$=\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}$$

$$p(J_1\cap V_2)=p(J_1)\times p_{J_1}(V_2)$$
$$=\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}=\frac{8}{33}$$

$$p(V_1\cap J_2)=p(V_1)\times p_{V_1}(J_2)$$
$$=\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{33}$$

$$p(V_1\cap V_2)=p(V_1)\times p_{V_1}(V_2)$$
$$=\frac{8}{12}\times\frac{7}{11}=\frac{14}{33}$$

## VI - دستور الاحتمالات الكلية :

$\Omega$ مجموعة الإمكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية . $P$ احتمال معرف على $\Omega$ .

تعريف :

نقول عن الحوادث $A_1, A_2, ..., A_n$ أنها تجزئة للمجموعة $\Omega$ إذا وفقط إذا كانت :

1- كل من هذه الحوادث غير مستحيلة .

2- كل حادثتين من هذه الحوادث غير متلائمتين .

3- اتحاد هذه الحوادث يساوي $\Omega$ .

مثال :

عند رمي النرد مرة واحدة نجد أن مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

لتكن الحوادث $C, B, A$ حيث : $A$ " ظهور رقم أولي "

$B$ "ظهور رقم مضاعف للعدد 4 " ؛ $C$ " ظهور العدد 1 أو 6 "

لدينا : $A = \{2,3,5\}$ , $B = \{4\}$ , $C = \{1,6\}$

نلاحظ أن $A, B, C$ حوادث غير مستحيلة و كل حادثتين منها غير متلائمتين و اتحادها هو $\Omega$ . و عليه الحوادث $A, B, C$ تشكل تجزئة للمجموعة $\Omega$ .

مبرهنة: ( دستور الاحتمالات الكلية )

$\Omega$ مجموعة الامكانيات المتعلقة بتجربة عشوائية .

$P$ احتمال معرف على $\Omega$ . $(A_1, A_2, ..., A_n)$ تجزئة للمجموعة $\Omega$ .

إذا كانت $A$ حادثة من $\Omega$ فإن :

$$P(A) = P_{A_1}(A).P(A_1) + P_{A_2}(A).P(A_2) + ... + P_{A_n}(A).P(A_n)$$

و يسمى دستور الاحتمالات الكلية .

مثال 1 :

في المثال السابق : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$(A, B, C)$ تجزئة للمجموعة $\Omega$ حيث :

$$A = \{2,3,5\}$$
$$B = \{4\}$$
$$C = \{1,6\}$$

احسب احتمال الحادثة $E = \{3,4,5,6\}$ بطريقتين .

الحل :

1- الطريقة الأولى : $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2- الطريقة الثانية : باستعمال دستور الاحتمالات الكلية :

$$P(E) = P_A(E).P(A) + P_B(E).P(B) + P_C(E).P(C)$$

حيث : $P(A) = \frac{3}{6}$ , $P(B) = \frac{1}{6}$ , $P(C) = \frac{2}{6}$

لدينا: $P_A(E) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$

لأن : $E \cap A = \{3,5\}$ و عليه : $P(E \cap A) = \frac{2}{6}$ .

لدينا: $P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1$

لأن : $E \cap B = \{4\}$ و منه : $p(E \cap B) = \frac{1}{6}$

لدينا : $p_C(E) = \frac{p(E \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$

لأن : $E \cap C = \{6\}$ و عليه : $p(E \cap C) = \frac{1}{6}$

إذن : $p(E) = p_A(E).p(A) + p(E).p(B) + p_c(E).p(C)$

$p(E)=\frac{2}{3}.\frac{3}{6}+1.+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}$ ومنه : $p(E)=\frac{2}{3}$ .

مثال 2 :

يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرتان بيضاويين .

نسحب من الكيس كرتين عشوائيا ( على التوالي و دون إرجاع ) .

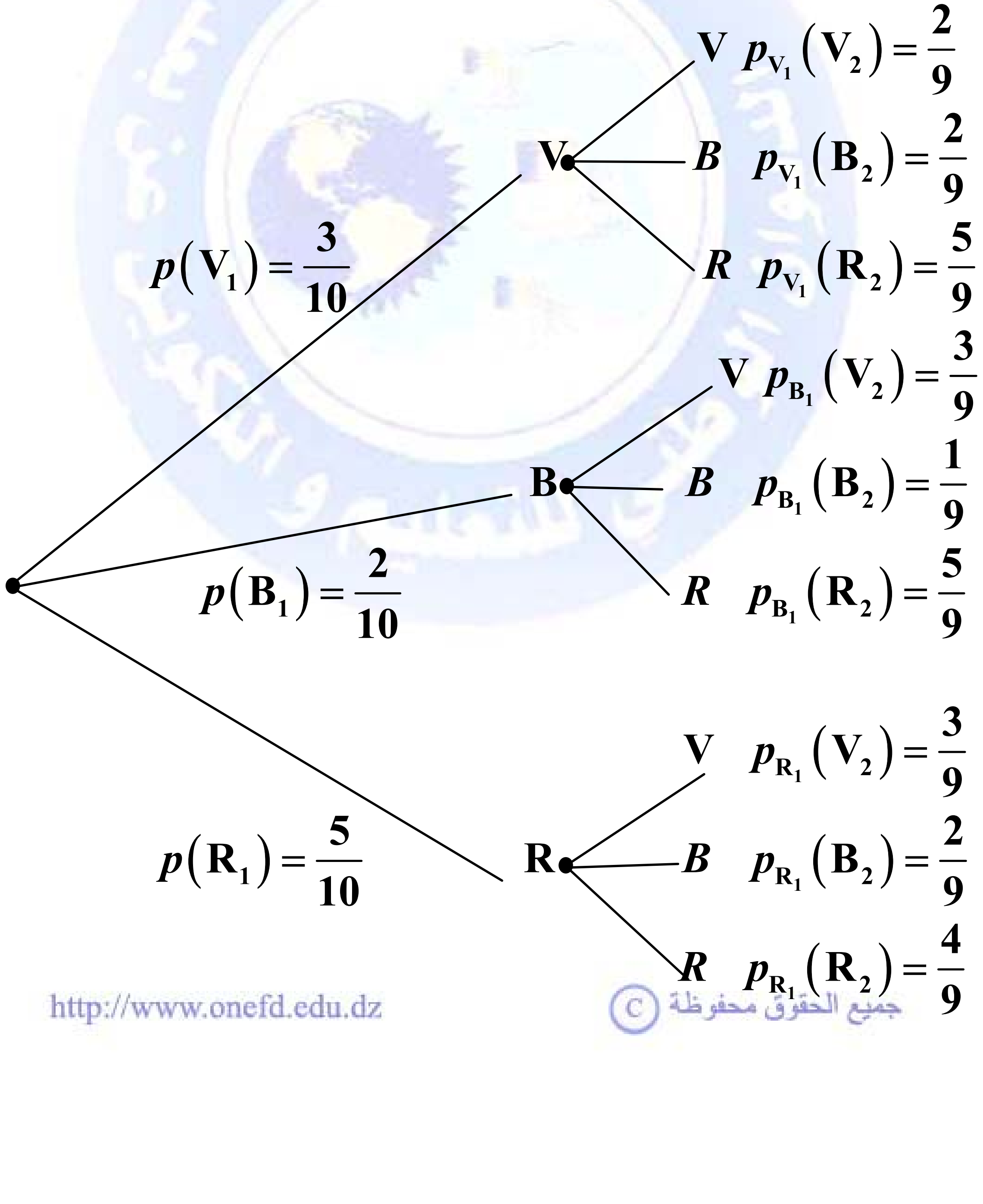
مثل الوضعية بشجرة .

- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء في السحب الثاني .

الحل :

- نمذجة هذه الوضعية بواسطة شجرة :

نرمز بـ : $\mathrm{V}$ لكرة بيضاء ، $B$ كرة خضراء ، $R$ كرة حمراء .



السحب الأول السحب الثا

- احتمال الحصول على كرة خضراء في السحب الثاني :

$$p(\mathrm{V}_2) = p_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{V}_2) \times P(\mathrm{V}_1) + p_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{V}_2).p(B_1) + p_{\mathrm{R}_1}(\mathrm{V}_2).p(\mathrm{R}_1)$$

$$p(\mathrm{v}_2) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{9} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{9} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{6+6+15}{90}$$

$$p(\mathrm{v}_2) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

## تمـارين و مشكلات

التمرين 1 .

زهرتي نرد غير مزيفتين لونهما مختلفان و أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6 .

نرمي هذين النردين و نسجل الرقمين الذين يظهران على الوجهين العلويين .

1 - عين على شكل جدول مجموعة إمكانيات الحدوث .

2 - عين الحوادث التالية :

$A$ : ظهور رقمين فرديين

$B$ : ظهور رقمين مجموعهما أكبر من 7 .

$C$ : ظهور رقمين أوليان .

$D$ : ظهور رقمين أحدهما فردي و الآخر زوجي .

$$\overline{B} \cap \overline{D} \quad , \overline{B} \ , \overline{D} \ , \ A \cap C \ \ , A \cap B$$

2 – أحسب احتمالات كل من الحوادث السابقة .

التمرين 2 .

زهرة نرد مزيفة أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 . احتمال ظهور رقم زوجي ضعف احتمال ظهور رقم فردي .

1) أحسب احتمال ظهور رقم زوجي ثم احتمال ظهور رقم فردي .

2) أحسب احتمال ظهور الرقم 2 و الرقم 5 .

التمرين 3 .

يحتوي كيس على 6 كريات مرقمة من 1 إلى 6 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب من الكيس كريتين على التوالي بحيث بعد كل سحب نعيد الكرية المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

1) أنشئ مخطط يبين كل الحالات .

2) أحسب الاحتمال لأن تكون الكرية الثانية تحمل رقم 5 .

3) أعد نفس الأسئلة السابقة مع عدم رد الكرية المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

التمرين 4 .

صمم مكعب غير متجانس و كتبت على أوجهه الأعداد $6,5,4,3,2,1$ بحيث إذا ألقي على مستوى أفقي يكون احتمال ظهور أي عدد متناسبا مع ذلك العدد .

1 – عين مجموعة الإمكانيات $\Omega$

2 – أحسب احتمالات الحوادث البسيطة .

3 – أحسب احتمال ظهور عدد أولي .

4 – أحسب احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي 5 .

**التمرين 5 .**

نسحب ورقتين عشوائيا من بين 20 ورقة مرقمة من 1 إلى 20 .

أوجد احتمال أن يكون المجموع فرديا في كل حالة مما يلي :

1 – سحب الورقتين معا .

2 – سحب الورقتين الواحدة بعد الأخرى دون إعادة الورقة المسحوبة قبل سحب الورقة الثانية .

3 – سحب الورقتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الورقة المسحوبة قبل سحب الورقة الثانية .

**التمرين 6 .**

يتكون قسم دراسي من 10 تلاميذ أعمارهم 16 سنة و 5 تلاميذ أعمارهم 17 سنة و 20 تلميذا أعمارهم 18 سنة ، أرادوا تشكيل لجنة مكونة من تلميذين .

1 – ما هو عدد الطرائق لاختيار هذين التلميذين .

2 – ما احتمال اختيار تلميذين مجموع سنهما 34 سنة .

3 – نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذين يرفق بكل من هذه الإمكانيات لاختيار تلميذين مجموع سني هذين التلميذين .

- أكتب قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي .
- أحسب الأمل الرياضياتي .
- أحسب التباين و الانحراف المعياري .

**التمرين 7 .**

برهن على صحة الخاصية : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} . C_{n-1}^p = 0$$

**التمرين 8 .**

1 – برهن أن : $C_n^0 + C_n^1 + ........ + C_n^n = 2^n$

2 – أثبت أن : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

3 – أحسب المجموع $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$

**التمرين 9 .**

عند نشر $(a+b)^{100}$ ما هو معامل الحد $a^{70} . b^{30}$

ما هي رتبة الحد $a^{41} \times b^{59}$

**التمرين 10** .

انشر كل من $(1+1)^n$ و $(1-1)^n$ ثم استنتج المجاميع :

$$S_1 = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$
$$S_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...$$
$$S_3 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$$

**التمرين 11** .

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم فإن : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

**التمرين 12** .

كم عددا يمكن تشكيله باستخدام الأرقام $9,8,7,6,5,4,3,2,1,0$ إذا كانت هذه الأعداد مكونة من :

1) 6 أرقام

2) 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى

3) 6 أرقام و مضاعفة $5 \geq$

4) 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية .

**التمرين 13** .

يحتوي كيس على 20 قريصة مرقمة من 1 إلى 20 . نسحب من الكيس قريصتين في آن واحد و بلا اختيار .

- أحسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 10 .
- أحسب احتمال سحب قريصتين الفرق بين رقميهما يساوي 4 .
- أحسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما 10 علما أن الفرق بينهما 4 .

**التمرين 14** .

قطعة نقود صنعت مزيفة بحيث عند رميها يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الحرف $A$ ضعف احتمال ظهور الوجه الآخر و الذي يحمل الحرف $B$ .

1 – أحسب الاحتمالات التالية :

$$p(A \cap B) \quad , p(\overline{A}), p(B) \ , \ p(A)$$

3 – نفرض أن ظهور الوجه $A$ يعطي ربح 100 دج و ظهور الوجه $B$ يعطي خسارة 50 دج .

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم الربح أو الخسارة .

- أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$
- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير $X$
- أحسب التباين و الإنحراف المعياري للمتغير $X$

**التمرين 15 .**

يتكون مصنع لإنتاج الثلاجات من 3 أقسام حيث تساهم بـ 30% ، 60% 10 % على الترتيب في الإنتاج الكلي للمصنع و احتمالات أن تكون الثلاجة صالحة للاستعمال علما أنها صنعت في الأقسام الثلاثة هي 0,75 , 0,85 , 0,90 على الترتيب .

ما هو احتمال أن تكون الثلاجة المصنوعة في هذا المصنع صالحة للاستعمال .

**التمرين 16 .**

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء .

نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي و دون إرجاع .

1 – احسب احتمال تحقق كل من الحدثين $A$ و $B$ حيث :

$A$ : الحصول على اللونين معا .

$B$ : الحصول على لون واحد .

2 – استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين

لحساب احتمال تحقق كل من الحدثين $A$ و $B$ .

**التمرين 17 .**

يحتوي كيس على 5 كرات خضراء و 3 كرات صفراء .

نسحب من الكيس 3 كرات على التوالي بحيث بعد كل سحب نعيد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

1 – احسب احتمال تحقق كل من الحدثين $C$ و $D$ حيث :

$C$ : الحصول على اللونين معا

$D$ : الحصول على لون واحد .

2 – استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين

و لحساب تحقق كل من الحدثين $C$ و $D$ .

## الحــلـــــــول

**التمرين 1** .

1 – تعيين في جدول مجموعة إمكانيات الحدوث : ليكن النردين

$D_1$ و $D_2$

| $D_2$ \ $D_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $(1;1)$ | $(1;2)$ | $(1;3)$ | $(1;4)$ | $(1;5)$ | $(1;6)$ |
| 2 | $(2;1)$ | $(2;2)$ | $(2;3)$ | $(2;4)$ | $(2;5)$ | $(2;6)$ |
| 3 | $(3;1)$ | $(3;2)$ | $(3;3)$ | $(3;4)$ | $(3;5)$ | $(3;6)$ |
| 4 | $(4;1)$ | $(4;2)$ | $(4;3)$ | $(4;4)$ | $(4;5)$ | $(4;6)$ |
| 5 | $(5;1)$ | $(5;2)$ | $(5;3)$ | $(5;4)$ | $(5;5)$ | $(5;6)$ |
| 6 | $(6;1)$ | $(6;2)$ | $(6;3)$ | $(6;4)$ | $(6;5)$ | $(6;6)$ |

2- تعيين الحوادث :

$$A=\{(1;1),(1;3),(1;5),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5)\}$$

$$B=\{\ (2;6),(3;5),(3;6),(4;4),(4;5),(4;6),(5;3),(5;4),$$
$$(5;5),(5;6),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)\ \}$$

$$C=\{(2;2),(2;3),(2;5),(3;2),(3;3),(3;5),(5;2),(5;3),(5;5)\}$$

$$D=\{\ (1;2),(1;4),(1;6),(2;1),(2;3),(2;5),(3;2),(3;4),(3;6)$$
$$(4;1),(4;3),(4;5),(5;2),(5;4),(5;6)(6;1),(6;3),(6;5)\ \}$$

$$A\cap B=\{(3;5),(5;3),(5;5)\}$$

$$\overline{D}=\{\ (1;1),(1;3),(1;5),(2;2),(2;4),(2;6),(3;1),(3;3),$$
$$(3;5),(3;5),(4;2),(4;4),(4;6),(5;1),(5,3),$$
$$(5;5),(6;2),(6;4),(6;6)\ \}$$

$$\overline{B}=\{\ (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(2;2),$$
$$(2;3),(2;4),(2;5),(3;1),(3;2),(3;3),(3,4),(5;1)$$
$$(4;1),(4;2),(4;3),(5;1),(5;2),(6,1)\ \}$$

$$\overline{B}\cap\overline{D}=\{\ (1;1),(1;3),(1;5),(2;2),(2;4),(3;1),(3;3),$$
$$(4;2),(5;1)\ \}$$

3- حساب الاحتمالات :

$$p(A)=\frac{9}{36}=\frac{3}{12}\quad,\quad p(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

$$p(C)=\frac{9}{36}=\frac{3}{12}\quad,\quad p(D)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

$$p(A\cap C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\quad ؛\quad p(A\cap B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

$$p(\overline{B})=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}\quad ؛\quad p(\overline{D})=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

$$p\left(\overline{B}\cap\overline{D}\right)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

**التمرين 2 .**

1) مجموعة الإمكانيات $\Omega$ هي : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

حيث إذا كان $p$ احتمال على $\Omega$ فإن : $p(\Omega)=1$

إذن : $p\left(\{1,2,3,4,5,6\}\right)=1$

و منه : $p\left(\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}\right)=1$

و بالتالي : $p\left(\{1,3,5\}\right)+p\left(\{2,4,6\}\right)=1 \quad ...(1)$

لأن: $\{2,4,6\}\cap\{1,3,5\}=\varnothing$

و بما أن احتمال ظهور رقم زوجي ضعف احتمال ظهور رقم فردي فإن:

$$p\left(\{2,4,6\}\right)=2p\left(\{1,3,5\}\right)$$

بوضع : $p\left(\{1,3,5\}\right)=a$ نجد : $p\left(\{2,4,6\}\right)=2a$

و منه بالتعويض في (1) نجد : $a+2a=1$

و عليه : $3a=1$ أي $a=\frac{1}{3}$

إذن : $p\left(\{1,3,5\}\right)=\frac{1}{3}$ و $p\left(\{2,4,6\}\right)=\frac{2}{3}$

أي أن احتمال ظهور رقم فردي هو $\frac{1}{3}$ و احتمال ظهور رقم زوجي

هو $\frac{2}{3}$

احتمال ظهور الرقم 2 :

لدينا : $p\left(\{2,4,6\}\right)=\frac{2}{3}$

و عليه : $p\left(\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}\right)=\frac{2}{3}$

$$p\left(\{2\}\right)+p\left(\{4\}\right)+p\left(\{6\}\right)=\frac{2}{3}$$

لكن : $p\left(\{2\}\right)=p\left(\{4\}\right)=p\left(\{6\}\right)=h$

و منه : $3h=\frac{2}{3}$ إذن : $h=\frac{2}{9}$

إذن احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{2}{9}$

- احتمال ظهور الرقم 5 : لدينا : $p\left(\{1,3,5\}\right)=\frac{1}{3}$

و منه : $p\left(\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\}\right)=\frac{1}{3}$

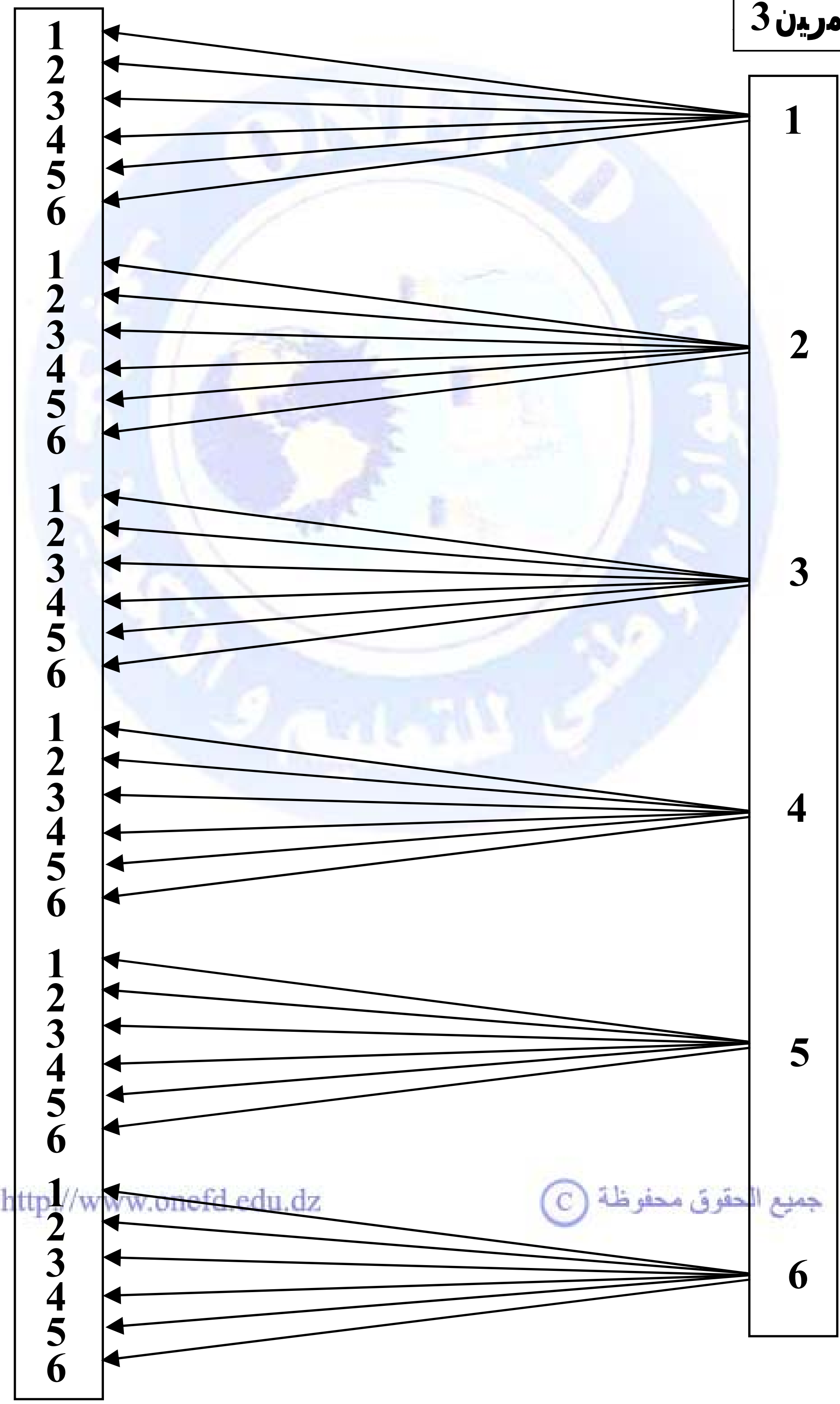
إذن : $p\left(\{1\}\right)+p\left(\{3\}\right)+p\left(\{5\}\right)=\frac{1}{3}$

لكن : $p\left(\{1\}\right)=p\left(\{3\}\right)=p\left(\{5\}\right)=m$

إذن : $3m = \frac{1}{3}$ و منه : $m = \frac{1}{9}$

إذن احتمال ظهور الرقم 5 هو $\frac{1}{9}$

## التمرين 3



السحبة الأو السحبة الثانية

2 – حساب الاحتمال :

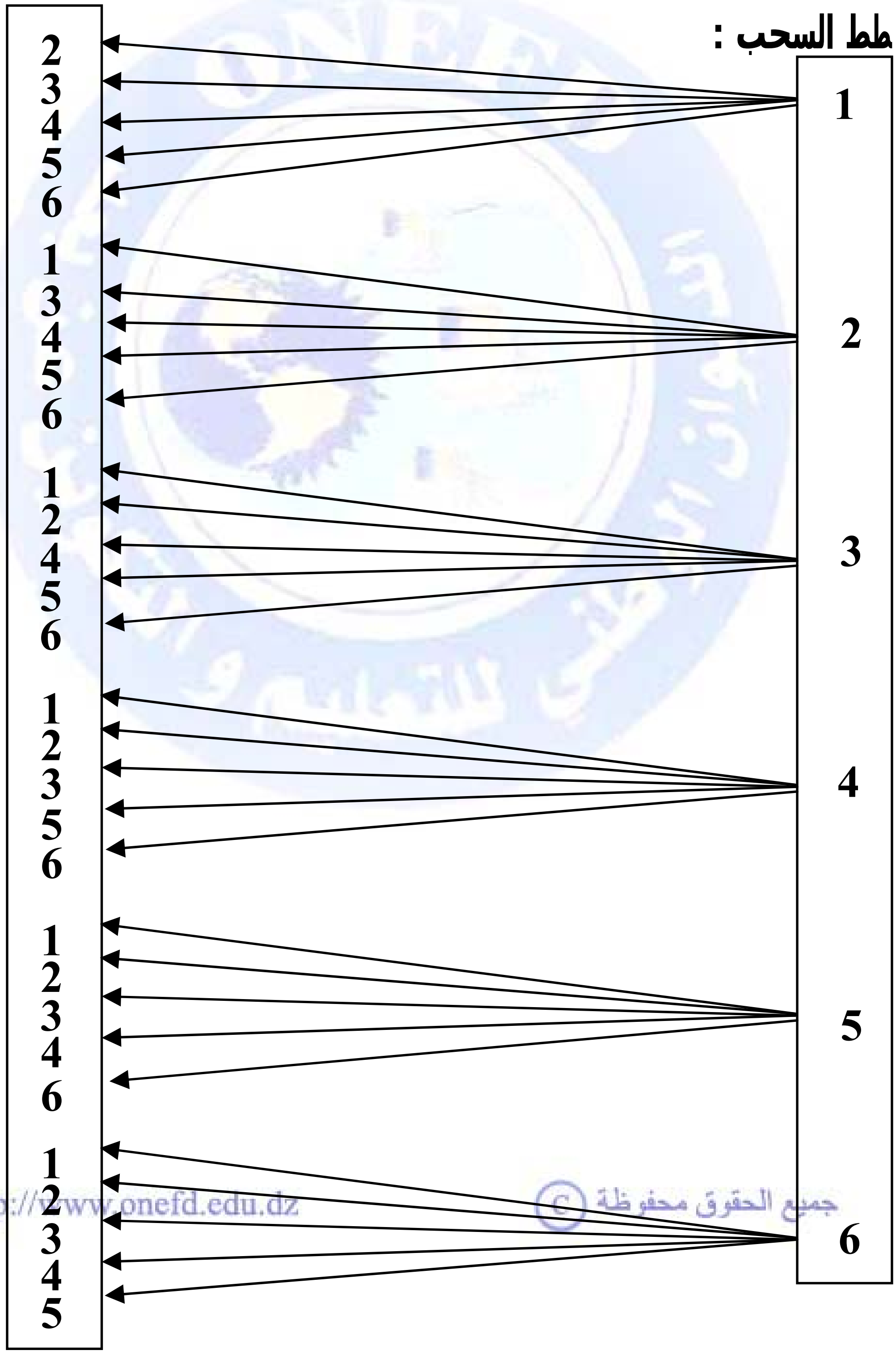
عدد ا الات ا مكنة هو : $6\times 6=36$

عدد ا الات ا لائمة هو : $6\times 1=6$

الاحتمال : $p=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

3– السحب دون إرجاع :

طط السحب :



- حساب الاحتمال :

عدد الحالات الممكنة : $6\times5=30$

عدد الحالات الملائمة : $6\times1=6$

الاحتمال : $p=\frac{6}{36}=\frac{1}{5}$

**التمرين 4** .

1 – مجموعة الإمكانيات : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

2 – حساب احتمالات الحوادث البسيطة :

لدينا : $p(\Omega)=1$ أي :

$$p(\{1\})+p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{4\})+p(\{5\})+p(\{6\})=1$$

و عليه : $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$

لكن : $\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=\frac{p_3}{3}=\frac{p_4}{4}=\frac{p_5}{5}=\frac{p_6}{6}=\alpha$

إذن : $p_1=1\alpha$ و $p_2=2\alpha$ و $p_3=3\alpha$ و $p_4=4\alpha$ و $p_5=5\alpha$

$p_6=6\alpha$

و بالتالي : $\alpha+2\alpha+3\alpha+4\alpha+5\alpha+6\alpha=1$

و منه : $21\alpha=1$ أي أن : $\alpha=\frac{1}{21}$

و عليه : $p_3=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ ، $p_2=\frac{2}{21}$ ، $p_1=\frac{1}{21}$ ،

$p_6=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$ ، $p_5=\frac{5}{21}$ ، $p_4=\frac{4}{21}$

3- حساب احتمال ظهور عدد أولي :

$$p(\{2,3,5\})=p(\{2\})+p(\{3\})+p(\{5\})$$

$$=\frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{10}{21}$$

4 – حساب احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي 5 :

$$p(\{5,6\}) = p(\{5\}) + p(\{6\}) = p_5 + p_6$$
$$= \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}$$

**التمرين 5 .**

يكون المجموع فرديا إذا كانت ورقة تحمل رقما زوجيا و الأخرى فرديا .

1 – عدد الطرق الممكنة لسحب الورقتين معا : $C_{20}^{2} = 190$

عدد الطرائق الملائمة لسحب ورقتين إحداهما تحمل رقم زوجي و الأخرى فردي أي مجموع الرقمين فردي هو : $C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} = 100$

الاحتمال : $p_1 = \frac{100}{190} = \frac{10}{19}$

2 – عدد الطرائق الممكنة لسحب الورقتين على التوالي دون الإعادة :

$$A_{20}^{2} = 20 \times 19 = 380$$

- عدد الحالات الملائمة لسحب ورقتين مجموعها فردي، أي أن تكون الأولى زوجية و الثانية فردية أو الأولى فردية و الثانية زوجية و عددها : $10 \times 10 + 10 \times 10 = 200$

الاحتمال : $p_2 = \frac{200}{380} = \frac{10}{19}$

3 – عدد طرائق سحب ورقتين على التوالي مع الإرجاع هو :

$$20 \times 20 = 400$$

- عدد الطرائق الملائمة : $10 \times 10 + 10 \times 10 = 200$

لأن إما أن تكون الأولى فردية و الثانية زوجية أو أن تكون الأولى زوجية و الثانية فردية .

الاحتمال هو : $p_3 = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$

**التمرين 6 .**

1 – عدد الطرائق لاختيار هذين التلميذين :

$$C_{35}^{2} = \frac{35!}{(35-2)! \times 2!}$$

$$C_{35}^{2} = \frac{35 \times 34 \times 33!}{33! \times 2} = 35 \times 17 = 595$$

2 – احتمال اختيار تلميذين مجموع سنيهما 34 سنة :

عدد الطرائق الملائمة : $C_{10}^{1} \times C_{20}^{1} + C_{5}^{2} = 210$

( أي تلميذ عمره 16 سنة و آخر 18 سنة أو تلميذين عمر كل منهما 17 سنة ) .

الاحتمال هو : $\frac{210}{595} = \frac{6}{17}$

3 – قيم $X$ هي : $36,35,34,33,32$

$$p[X = 32] = \frac{C_{10}^{2}}{595} = \frac{45}{595} = \frac{9}{119}$$

$$p[X = 33] = \frac{C_{10}^{1} \times C_{5}^{1}}{595} = \frac{50}{595} = \frac{10}{119}$$

$$p[X = 34] = \frac{C_{10}^{1} \times C_{20}^{1} + C_{5}^{2}}{595} = \frac{210}{595} = \frac{42}{119}$$

$$p[X = 35] = \frac{C_{5}^{1} \times C_{20}^{1}}{595} = \frac{100}{595} = \frac{20}{119}$$

$$p[X = 36] = \frac{C_{20}^{2}}{595} = \frac{190}{595} = \frac{38}{119}$$

قانون الاحتمال :

| قيم $X$ | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{9}{119}$ | $\frac{10}{119}$ | $\frac{42}{119}$ | $\frac{20}{119}$ | $\frac{38}{119}$ |

- الأمل الرياضياتي :

$$E(X) = \frac{32 \times 9}{119} + \frac{33 \times 10}{119} + \frac{34 \times 42}{119} + \frac{35 \times 20}{119} + \frac{36 \times 38}{119}$$

$$E(X) = \frac{288 + 330 + 1428 + 700 + 1368}{119} = \frac{4114}{119}$$

إذن: $E(X) \simeq 34,57$ .



- التباين :

$$V \simeq (32\text{-}35)^2 \times \frac{9}{119} + (33\text{-}35)^2 \times \frac{10}{119} + (34\text{-}35)^2 \times \frac{42}{119}$$
$$+ (35\text{-}35)^2 \times \frac{20}{119} + (36\text{-}35)^2 \times \frac{38}{119}$$
$$V \simeq \frac{81+40+42+0+38}{119}$$
$$V \simeq \frac{201}{119}$$
$$V \simeq 1,7$$

- الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{V}$$
$$\sigma \simeq 1,3$$

**التمرين 7** .

- البرهان على صحة الخاصية : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{\left[(n-1)p(p-1)\right]!(p-1)} + \frac{(n-1)!}{[n-1-p]!.p!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-p)!.(p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-p)!.p!}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(n-p).(n-p-1)!.(p-1)} + \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!.p(p-1)}$$
$$= \frac{(n-1)!.p + (n-1)!.(n-p)}{(n-p).(n-p-1)!\,p(p-1)}$$
$$= \frac{(n-1)![p+n-p]}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$
$$= C_n^p$$



حل المعادلة :

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p = 0$$

$$\Delta = \left(-C_n^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_n^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2 + 2C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p + \left(C_{n-1}^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2 - 2C_{n-1}^{p-1}.C_{n-1}^p + \left(C_{n-1}^p\right)^2$$

$$\Delta = \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)^2$$

و عليه $\Delta > 0$ و منه للمعادلة حلين متمايزين :

$$x_1 = \frac{C_n^p - \left(C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p\right)}{2} = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}{2}$$

و منه: $x_1 = C_{n-1}^p$

$$x_2 = \frac{C_n^p - C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2} = \frac{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p}{2}$$

و منه: $x_2 = C_{n-1}^{p-1}$

$$S = \left\{C_{n-1}^p, C_{n-1}^{p-1}\right\}$$

**التمرين 8** .

1 – نبرهن أن : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

لدينا : $\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^n a^{n-n} b^n$

بوضع $a = b = 1$ نجد :

$$\left(1+1\right)^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

إذن : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

و يمكن البرهان بالتراجع على صحة :

$$p(n): C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$$

- من أجل $n=0$ : $C_0^0 = 2^0$ صحيحة

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k): C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k = 2^k$$

$$p(k+1): C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+1}^{k+1} = 2^{k+1}$$

لدينا مما سبق :

$$C_{k+1}^0 = C_k^0$$

$$C_{k+1}^1 = C_k^0 + C_k^1$$

$$C_{k+1}^2 = C_k^1 + C_k^2$$

$$\vdots$$

$$C_{k+1}^k = C_k^{k-1} + C_k^k$$

$$C_{k+1}^{k+1} = C_k^k + C_k^{k+1}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد :

$$\begin{aligned} C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+1}^{k+1} &= 2C_k^0 + 2C_k^1 + ... + 2C_k^k + C_k^{k+1} \\ &= 2\left(C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k\right) + 0 \\ &= 2.2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

و منه $p(k+1)$ صحيحة و عليه $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$

2 – إثبات أن : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

$$pC_n^p = p \times \frac{n!}{(n-p)! \times p!} = p \times \frac{n!}{(n-p)!\,p(p-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!(p-1)!} ...(1)$$

$$nC_{n-1}^{p-1} = n.\frac{(n-1)!}{\left[(n-1)-(p-1)\right]!.(p-1)!} = \frac{n(n-1)}{(n-p)!.(p-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!.(p-1)!} \ldots (2)$$

من (1) و (2) : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

3 – حساب المجموع $S$ :

$$S = 1.C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$$

مما سبق :

$$S = n.C_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + nC_{n-1}^{n-1}$$

$$S = n\left[C_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + nC_{n-1}^{n-1}\right]$$

و من السؤال 1 : $S = n.2^{n-1}$

**التمرين 9** .

$$(a+b)^{100} = \sum_{p=0}^{p=100} C_{100}^p .a^{100-p} .b^p$$

- معامل $a^{30}.b^{30}$ :

- لدينا :

$$\begin{cases} 100 - p = 70 \\ p = 30 \end{cases}$$

و منه : $p = 30$

إذن المعامل هو : $C_{100}^{30}$

- رتبة الحد : $a^{41} \times b^{59}$ إذن :

$$\begin{cases} 100 - p = 41 \\ p = 59 \end{cases}$$

إذن : $p = 59$

و عليه رتبة هذا الحد هي : 60 .

**التمرين 10 .**

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p (1)^{n-p} .(1)^p = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$$

$$2 = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

$$(1+1)^n = \left[1+(-1)\right]^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p (1)^{n-p} .(-1)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p (-1)^p = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n$$

**استنتاج المجاميع :**

$$S_1 = (1+1)^n = 2^n$$

$$S_1 = \left(C_n^0 + C_n^2 + ...\right) + \left(C_n^1 + C_n^3 + ...\right)$$

$$S_1 = S_2 + S_3$$

$$0 = \left(C_n^0 + C_n^2 + ...\right) - \left(C_n^1 + C_n^3 + ...\right)$$

$$0 = S_2 - S_3$$

**إذن :** $\begin{cases} S_2 + S_3 = 2^n \\ S_2 - S_3 = 0 \end{cases}$

**بالجمع نجد :** $2S_2 = 2^n$

**إذن :** $S_2 = \frac{2^n}{2}$ **و عليه :** $S_2 = 2^{n-1}$ **و بالتالي :** $S_3 = 2^{n-1}$

**التمرين 11 .**

**البرهان بالتراجع على صحة الخاصية :** $p(n) : \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

- من أجل $n=1$ : $\frac{1}{2^0} \leq \frac{1}{1!}$ أي $1 \leq 1$

- و هذا صحيح و منه $p(1)$ صحيحة .

نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k) : \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$p(k+1) : \frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$$

لدينا : $k \geq 1$

إذن : $k+1 \geq 2$ و عليه : $(k+1) : k! \geq 2.k!$

و منه : $(k+1)! \geq 2.k!$ و بالتالي : $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2.k!} \dots (1)$

لكن : $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ و منه : $\frac{1}{2k!} \leq \frac{1}{2.2^{k-1}}$

إذن : $\frac{1}{2.k!} \leq \frac{1}{2^k} \dots (2)$

من $(1)$ و $(2)$ : $\frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{2^k}$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة .

و منه : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم .

**التمرين 12** .

1 – عدد الأعداد المكونة من 6 أرقام :

و هي من الشكل $abcdef$ حيث : $a \neq 0$

لدينا: 10 إمكانيات لاختيار كل عدد منها ما عدا $a$ فلدينا 9 إمكانيات

لأن : $a \neq 0$ و حسب المبدأ الأساسي عدد الأعداد هو : $9 \times 10^9$

2 – عدد الأعداد المكونة من 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى و هي من الشكل : $abcdef$ حيث $a \neq 0$

- عدد الأعداد من هذا الشكل بما فيهم التي تشمل 0 على اليسار هو :

$$A_{10}^{6} \quad \text{أي} \quad \frac{10!}{(10-6)!} \quad \text{أي} : 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5$$

و عليه عدد هذه الأعداد هو : 151200

و عدد الأعداد من الشكل $abcdef$ هو عدد الأعداد ذات 5 أرقام و عددها $A_9^5$ حيث :

$$A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = 9\times 8\times 7\times 6\times 5$$

أي : $A_9^5 = 15120$

ومنه عدد الأعداد ذات 6 أرقام متمايزة مثنى مثنى هو :

$$A_{10}^{6} - A_9^5 = 136080$$

3 – عدد الأعداد المكونة من 6 أرقام و مضاعفة لـ $5$ و هي من الشكل $abcde0$ أو $abcde5$ $(a \neq 0)$ أي رقم آحادها إما 0 أو 5

و عددها : $9\times 10\times 10\times 10\times 10\times 2$

حسب المبدأ الأساسي ( لدينا 9 إمكانيات الاختيار $a$ و 10 إمكانيات لاختيار كل من $b$ و $C$ و $d$ و $e$ و 2 إمكانية لاختيار $f$ )

و منه عدد هذه الأعداد هو : $18\times 10^4 = 180000$

4 – عدد الأعداد الفردية و المتمايزة مثنى مثنى .

و هي من الشكل : $abc$ حيث : $a \neq 0$ و $c \in \{1,3,5,7,9\}$

- عدد كل الأعداد الفردية من هذا الشكل بما فيها التي تشمل 0 على اليسار هو :

$8\times 9\times 5$ أي 360

- عدد الأعداد الفردية من الشكل : $abc$ هو : $8\times 5$ أي 40

و منه عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام متمايزة مثنى مثنى و فردية هو : $360 - 40 = 320$

**التمرين 13 .**

عدد السحبات الممكنة : $C_{20}^{2} = \frac{20!}{(20-2)! \times 2!}$

$= 190$

1) لتكن $A$ الحادثة المعرفة بمجموع الرقمين يساوي 10 .

$A = \{\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\}\}$

$p(A) = \frac{4}{190} = \frac{2}{95}$

2) لتكن $B$ الحادثة المعرفة بالفرق بين الرقمين يساوي 4 :

$$B = \{ \{1,5\},\{2,6\},\{3,7\},\{4,8\},\{5,9\},\{6;10\}, \{7,11\},\{8,12\},\{9,13\},\{10,14\},\{11,15\}, \{12,16\},\{13,17\},\{14,18\},\{15,19\},\{16,20\} \}$$

$p(B) = \frac{16}{190} = \frac{8}{95}$

3 – حساب $p_B(A)$ :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(b)}$$

لكن : $A \cap B = \{\{3,7\}\}$ و منه : $p(A \cap B) = \frac{1}{190}$

و عليه : $p_B(A) = \frac{\frac{1}{190}}{\frac{16}{190}} = \frac{1}{190} \times \frac{19}{16} = \frac{1}{16}$

**التمرين 14 .**

1) لتكن مجموعة الإمكانيات : $\Omega = \{A, B\}$

$p(\Omega) = 1$ و منه $p(A) + p(B) = 1$

لكن : $p(A)=2p(B)$ و منه : $3p(B)=1$

إذن : $p(B)=\frac{1}{3}$ و عليه $p(A)=\frac{2}{3}$

$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

حساب $p(A\cap B)$ :

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

$$1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-p(A\cap B)$$

و منه $p(A\cap B)=0$

2- قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ :

| قيم $X$ | 100 | 50- |
|---|---|---|
| $p_X$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

- الأمل الرياضياتي للمتغير $X$ :

$$E(X)=100\times\frac{2}{3}-50\times\frac{1}{3}=\frac{200-50}{3}$$

$$E(X)=\frac{150}{3}=50$$

- التباين : $V(X)=\frac{2}{3}(100-50)^2+\frac{1}{3}(-50-50)^2$

$$=\frac{2}{3}(2500)+\frac{1}{3}(10000)=\frac{5000+10000}{3}$$

$$V(X)=5000$$

- الانحراف المعياري :

لدينا : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ و منه : $\sigma(X)\simeq 70,7$

**التمرين 15** .

احتمال اختيار ثلاجة من إنتاج القسم الأول هو: $\frac{30}{100}$ أي: $p(C_1)=0,3$

احتمال اختيار ثلاجة من إنتاج القسم الثاني هو: $\frac{60}{100}$ أي: $p(C_2)=0,6$

احتمال اختيار ثلاجة من إنتاج القسم الثالث هو: $\frac{10}{100}$ أي: $p(C_3)=0,1$

احتمال أن تكون الثلاجة $F$ صالحة للاستعمال علما أنها انتجت في القسم الأول هو :

$$p_{C_1}(F)=0,75$$

احتمال أن تكون الثلاجة $F$ صالحة للاستعمال علما أنها انتجت في القسم الثاني هو :

$$p_{C_2}(F)=0,85$$

احتمال أن تكون الثلاجة $F$ صالحة للاستعمال علما أنها انتجت في القسم الثالث هو :

$$p_{C_3}(F)=0,90$$

و منه احتمال أن تكون ثلاجة $F$ صالحة للاستعمال في هذا المصنع :

$$p(F)=p_{C_1}(F)\times p(C_1)+p_{C_2}(F)\times p(C_2)+p_{C_3}(F)\times p(C_3)$$
$$=0,75\times 0,3+0,85\times 0,6+0,90\times 0,1=0,822$$

**التمرين 16** .

نرمز بالرمز $R$ لكرة حمراء و بالرمز $N$ لكرة سوداء .

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو : $A_{10}^{3}=720$

1) الحالات الملائمة لوقوع الحدث $A$ هي :

$$(R;R;\text{V});(R;\text{V};\text{R});(\text{V};R;R);(\text{V};\text{V};R);(\text{V};R;\text{V});(R;\text{V};\text{V})$$

و عليه عدد الحالات الملائمة للحصول على $A$ هو :

$$3.C_6^2\times C_4^1+3.C_6^1\times C_4^2=3\times 120+3\times 72=576$$

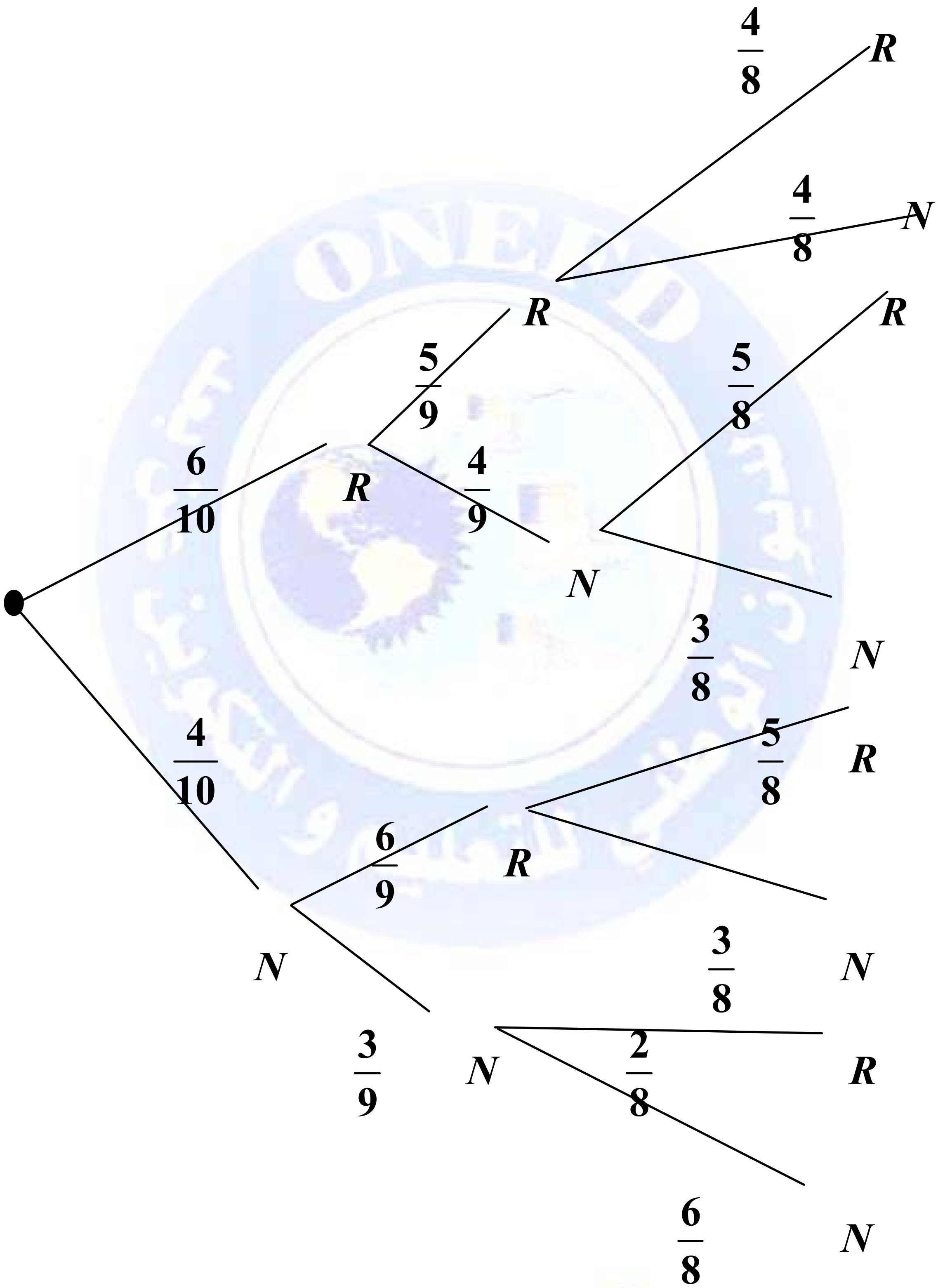
احتمال الحدث $A$ : $p(A)=\frac{576}{720}$

- الحالات الملائمة لوقوع الحدث $B$ :

$(R;R;R);(\text{V};\text{V};\text{V})$ و عليه عدد الحالات الملائمة للحصول

على $B$ هو : $C_6^3 + C_4^3 = 144$ و منه: $p(B) = \frac{144}{720}$

3) نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :



و عليه الحادثة $A$ تتكون من 6 مسارات نرمز لها بالرموز :

$$(N;R;R);(R;N;N);(R;N;R);(R;R;N);(N;N;R);(N;R;N)$$

$$p(A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$$

$$+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}$$

$$=\frac{120+120+72+120+72+72}{720}=\frac{576}{720}$$

أما الحادثة $B$ فتتكون من مسارين هما : $(R;R;R);(N;N;N)$

و عليه : $p(A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}$

$$=\frac{120+24}{720}$$

$$p(B)=\frac{144}{720}$$

**التمرين 17** .

نرمز بالرمز V لكرة خضراء و بالرمز J لكرة صفراء .

عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو : $8^3$ أي 512 .

1) الحالات الملائمة لوقوع الحدث $C$ هي :

$$(V;V;J);(V;J;V);(J;V;V);(V;J;J);(J;J;V);(J;V;J)$$

و عليه عدد الحالات الملائمة لوضوع الحدث هو : $3.5^2\times3+3.5^1.3^2=360$

و بالتالي : $p(C)=\frac{360}{512}$

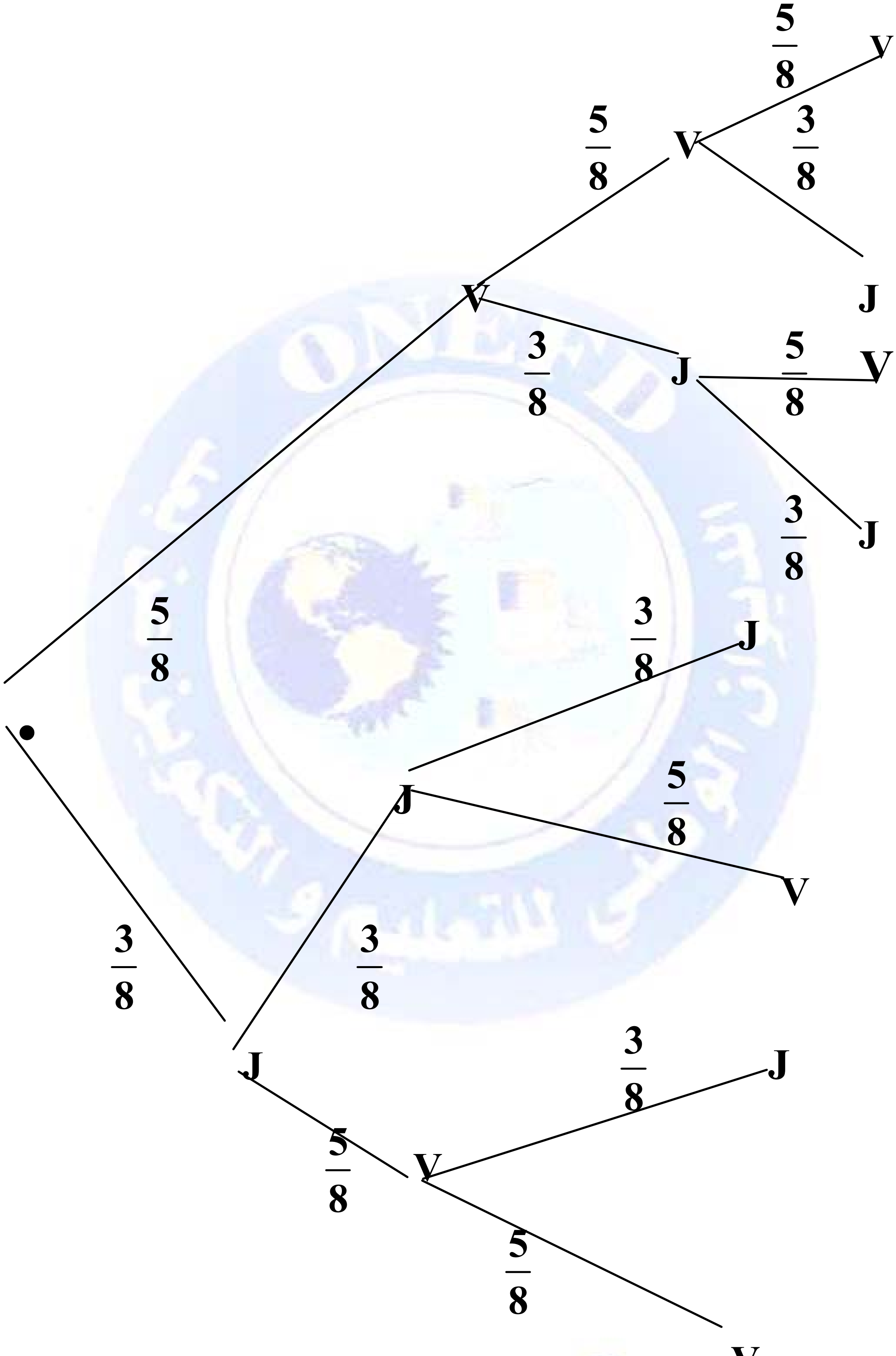
- الحالات الملائمة لوقوع الحدث $D$ هي :

$$(V;V;V),(J;J;J)$$

عدد الحالات الملائمة لوقوع $C$ هو : $5^3+3^3=152$

احتمال $C$ : $p(C)=\frac{152}{512}$

2 –نمذجة الوضعية باستعمال شجرة الاحتمالات :



و عليه :

$$p(A)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}$$

$$+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}$$

$$p(A)=\frac{3.5^2\times 3+3.5.3^2}{8^3}=\frac{360}{512}$$

و لدينا :

$$p(B)=\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}$$

إذن :

$$p(B)=\frac{152}{512}$$