# * الموافقات في $\mathbb{Z}$ و التعداد

الكفاءات المستهدفة :

1- معرفة استعمال خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

2- نشر عدد طبيعي وفق أساس.

3- الانتقال من نظام تعداد أساسه $\alpha$ إلى نظام تعداد أساسه $\beta$.

## تصميم الدرس

- أنشطة.

I – الموافقات.

II – التعداد.

- تمارين ومشكلات.

- الحلول.

# أشطة

- نشاط :

$n$ عدد طبيعي حيث : $n \geq 2$

$x$ عدد طبيعي حيث باقي قسمة $x$ على $n$ هو 1 ( $x$ غير معدوم ).

برهن أن باقي قسمة $x^p$ على $n$ هو 1 بالتراجع من أجل $p \geq 0$

استنتج باقي قسمة $(2007)^{2008}$ على $n^2$

الحل :

بما أن باقي قسمة $x$ على $n$ هو 1 فإن : $x-1$ مضاعف $n$ أي يوجد عدد طبيعي $k$

بحيث : $x-1=kn$ و منه : $x=kn+1$

لنبرهن بالتراجع على صحة الخاصية :

باقي قسمة $x^p$ على $n$ هو 1 :

- بداية التراجع : من أجل $p=0$ : $x^0=1$ و منه باقي قسمة $x^0$ على $n$ هو 1 .

- نبرهن الخاصية الوراثية :

نفرض أن باقي قسمة $x^p$ على $n$ هو 1

و نبرهن أن باقي قسمة $x^{p+1}$ على $n$ هو 1

بما أن باقي قسمة $x^p$ على $n$ هو 1 فإن: $x^p-1$ مضاعف $n$

و عليه يوجد عدد طبيعي $q_1$ بحيث: $x^p-1=q_1 n$

و منه: $x^p = q_1 n + 1$ لكن: $x^{p+1} = x^p . x$

إذن : $x^{p+1} = \left(q_1 n + 1\right).\left(kn + 1\right)$

و منه : $x^{p+1} = q_1 kn^2 + q_1 n + kn + 1$

إذن : $x^{p+1} - 1 = \left(q_1 kn + q_1 + k\right)n$

و منه : $x^{p+1} - 1$ مضاعف $n$ .

و عليه باقي قسمة $x^{p+1}$ على $n$ هو 1 .

- استنتاج باقي قسمة $\left(2007\right)^{2008}$ على 2 :

لدينا باقي قسمة 2007 على 2 هو 1 .

و عليه مما سبق باقي قسمة $\left(2007\right)^{2008}$ على 2 هو 1 .

# الموافقات

- تعريف :

$x$ و $y$ عددان صحيحان ، $n$ عدد طبيعي و يختلف عن 1 .

نقول إن $x$ و $y$ متوافقات بترديد $n$ إذا و فقط إذا كان $n$ يقسم $x-y$ ( أي $x-y$ مضاعف $n$ ) .

اصطلاحا نكتب : $x \equiv y[n]$

و نقرأ $x$ توافق $y$ بترديد $n$ .

أمثلة :

1) $7 \equiv 4[3]$ لأن: $7-4=3$ و هو مضاعف 3 .

2) $7 \equiv 1[3]$ لأن: $7-1=6$ و هو مضاعف 3 .

3) $10 \equiv 10[8]$ لأن: $10-10=0$ و هو مضاعف 8 .

4) $(-39) \equiv -5[2]$ لأن: $-39-(-5)=-34$ و هو مضاعف 2.

- خواص :

$n$ عدد طبيعي غير معدوم و يختلف عن 1

1) من أجل كل عدد صحيح $x$ فإن : $x \equiv x[n]$

و هذا واضح لكون $x-x=0$ ، 0 مضاعف $n$

2) من أجل كل عددان صحيحان $x$ و $y$ :

إذا كان : $x \equiv y[n]$ فإن : $y \equiv x[n]$

البرهان :

بما أن : $x \equiv y[n]$ فإن : $x-y$ مضاعف $n$ و منه يوجد عدد صحيح $k$ بحيث : $x-y=kn$ و عليه : $y-x=(-k)n$

و بالتالي : $y-x$ مضاعف $n$ إذن: $y \equiv x[n]$

3) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة: $x, y, z$ فإن :

إذا كان : $x \equiv y[n]$ و $y \equiv z[n]$ فإن : $x \equiv z[n]$



البرهان :

بما أن $x \equiv y[n]$ و $y \equiv z[n]$ فإن : $x-y$ و $y-z$
مضاعفات للعدد $n$ و عليه يوجد عددان صحيحان $p$ و $q$ بحيث : $x-y=pn$ و
$y-z=qn$
و بالجمع نجد : $x-z=(p+q)n$ و عليه : $x-z$ مضاعف $n$
إذن : $x \equiv z[n]$

4) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة: $a,b,x,y$ فإن :
إذا كان: $x \equiv y[n]$ و $a \equiv b[n]$ فإن: $x+a \equiv y+b[n]$.

5) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة : $a,x,y$
إذا كان: $x \equiv y[n]$ فإن: $x+a \equiv y+a[n]$ .

البرهان :
لدينا : $x \equiv y[n]$ و $a \equiv a[n]$ من الخاصية 1
و حسب الخاصية 4 فإن: $x+a \equiv y+a[n]$ .

6) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة: $a,b,x,y$
إذا كان: $x \equiv y[n]$ و $a \equiv b[n]$ فإن: $a.x \equiv by[n]$

البرهان :
بما أن: $x \equiv y[n]$ و $a \equiv b[n]$ فإنه يوجد عددان صحيحان
$p$ و $q$ بحيث: $x-y=p.n$ و $a-b=qn$
و لدينا : $ax-by=ax-bx+bx-by$

$$=(a-b)x+(x-y)b$$
$$=qnx+pnb$$
$$=(qx+pb)n$$

و عليه: $ax-by$ مضاعف $n$ إذن: $ax \equiv by[n]$ .

7) من أجل كل عدد من الأعداد الصحيحة : $a,x,y$:
إذا كان : $x \equiv y[n]$ فإن : $ax \equiv ay[n]$

البرهان :

لدينا : $x \equiv y[n]$ و $a \equiv a[n]$ حسب الخاصية (1) .

و عليه : حسب الخاصية 7 فإن $ax \equiv ay[n]$

8) من أجل كل عددان صحيحين $x$ و $y$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $\lambda$ . إذا كان: $x \equiv y[n]$ فإن: $\lambda x \equiv \lambda y[\lambda n]$ .

البرهان :

لدينا: $x \equiv y[n]$ و منه يوجد عدد صحيح $p$ حيث: $x - y = pn$

و عليه : $\lambda(x - y) = \lambda pn$ أي : $\lambda x - \lambda y = p(\lambda n)$

و منه : $\lambda x - \lambda y$ مضاعف للعدد $\lambda n$

و بالتالي : $\lambda x \equiv \lambda y[\lambda n]$

9) من أجل كل عددين صحيحين $x$ و $y$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $p$ . إذا كان: $x \equiv y[n]$ فإن: $x^p \equiv y^p[n]$ .

البرهان بالتراجع من أجل $p \geq 1$ :

- من أجل $p = 1$ : إذا كان $x \equiv y[n]$ فإن : $x \equiv y[n]$ و هذا صحيح و عليه بداية التراجع صحيحة .
- نفرض صحة الخاصية من أجل $k$ و نبرهن صحتها من أجل $k+1$ أي نفرض أنه:

إذا كان: $x \equiv y[n]$ فإن: $x^k \equiv y^k[n]$

و نبرهن أنه : إذا كان $x \equiv y[n]$ فإن : $x^{k+1} \equiv y^{k+1}[n]$

إذا كان $x \equiv y[n]$ فإن : $x^k \equiv y^k[n]$ صحيحة .

و حسب الخاصية 6 : $x^k . x \equiv y^k . y[n]$

و عليه : $x^{k+1} \equiv y^{k+1}[n]$ إذن الخاصية وراثية.

و منه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $p$

- إذا كان $p = 0$ و $x$ و $y$ غير معدومين فإن :

$x \equiv y[n]$ تكافئ $x^0 \equiv y^0[n]$ صحيحة .

10) ( $r$ هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $a$ على $n$ ) تكافئ $\begin{cases} a \equiv r[n] \\ 0 \leq r < n \end{cases}$

البرهان :

- إذا كان $x < n$ : باقي قسمة $x$ على $n$ هو $x$

و عليه $x \equiv x[n]$ ( صحيح حسب الخاصية 1)

- إذا كان $x \geq n$ : بإجراء عملية القسمة الإقليدية للعدد $x$ على $n$

نجد: $\begin{cases} x = nq + r \\ 0 \leq r < n \end{cases}$ و عليه: $x - r = nq$

و منه: $x \equiv r[n]$

11) لدينا: $a \equiv 0[n]$ يكافئ $a$ يقبل القسمة $n$

و هذا بديهي فإن كان $a \equiv 0[n]$ فإن $a$ مضاعف $n$

و إذا كان $a$ مضاعف $n$ فإن $a$ يقبل القسمة $n$ .

تطبيق 1 :

ما هو باقي قسمة العدد : $(2007)^{2008}$ على 2 :

الحل :

لدينا : $2007 \equiv 1[2]$ و عليه حسب الخاصية (9)

فإن: $(2007)^{2008} \equiv 1^{2008}[2]$ و بالتالي: $(2007)^{2008} \equiv 1[2]$

تطبيق 2 :

1- ادرس بواقي قسمة $2^n$ على 7 . ثم استنتج باقي قسمة 1962 على 7 .

2- أثبت أن العدد : $12.2^{3n+1} + 2^{12n} + 10$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

الحل :

1- بواقي قسمة $2^n$ على 7 :

$$2^0 \equiv 1[7] \; ; \; 2^1 \equiv 2[7] \; ; \; 2^2 \equiv 4[7] \; ; \; 2^3 \equiv 1[7]$$

و منه من العلاقة $2^3 \equiv 1[7]$ و حسب الخاصية9 لدينا :

$2^{3p} \equiv 1[7]$ من أجل كل عدد طبيعي $p$ .



لكن: $2 \equiv 2[7]$ و عليه: $2^{3p}.2 \equiv 1.2[7]$ إذن: $2^{3p+1} = 2[7]$

و كذلك : $2^2 \equiv 4[7]$ و عليه : $2^{3p}.2^2 \equiv 1.4[7]$

إذن : $2^{3p+2} \equiv 4[7]$

و بالتالي لما : $n = 3p$ : $2^n \equiv 1[7]$

و لما : $n = 3p+1$ : $2^n \equiv 2[7]$

و لما : $n = 3p+2$ : $2^n \equiv 4[7]$

- استنتاج باقي قسمة $2^{1962}$ على 7 :

لدينا : $1962 = 3 \times 654$ و منه : $1962 = 3p$

و منه : $2^{1962} \equiv 1[7]$

2- إثبات أن : $12.2^{3n+1} + 10.2^{12n} + 8 \equiv 0[7]$

لدينا: $12 \equiv 5[7]$ و $2^{3n+1} \equiv 2[7]$

و عليه: $12.2^{3n+1} \equiv 2 \times 5[7]$

إذن : $12.2^{3n+1} \equiv 3[7]$ ...(1) لأن : $10 \equiv 3[7]$

و لدينا : $2^{12n} = \left(2^{3n}\right)^4$ و عليه وبما أن : $2^{3n} \equiv 1[7]$

فإن: $\left(2^{3n}\right)^4 \equiv (1)^4[7]$ أي: $2^{12n} \equiv 1[7]$ ...(2)

و عليه من (1) و (2) نجد: $12.2^{3n+1} + 2^{12n} + 10 \equiv 4 + 10[7]$

إذن : $12.2^{3n+1} + 2^{12n} + 10 \equiv 0[7]$ .

# التعداد

1 – نشر عدد طبيعي وفق أساس :

مبرهنة :

$x$ عدد طبيعي حيث $x \geq 2$ .

كل عدد طبيعي غير معدوم $N$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

حيث : $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد طبيعية و كل منها أصغر تماما من $x$ $(a_n \neq 0)$

مثال 1 :

العدد 1954 المكتوب في النظام العشري يمكن أن يكتب:

$$1954 = 1.10^3 + 9.10^2 + 5.10^1 + 4$$

$$1954 = 4 + 5.10^1 + 9.10^2 + 1.10^3$$ و عليه : $x = 10$ .

مثال 2 :

اكتب العدد 47 في نظام التعداد الذي أساسه 2 :

الحل :

$$47 = 23 \times 2 + 1$$
$$23 = 11 \times 2 + 1$$
$$11 = 5 \times 2 + 1$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$
$$1 = 0 \times 2 + 1$$

و منه العدد 47 يكتب في النظام الثنائي هكذا $\overline{101111}^{2}$

و يقرأ واحد صفر واحد .

مثال3 :

اكتب العدد 2007 في نظام التعداد الذي أساسه 8

الحل :

$$2007 = 250 \times 8 + 7$$
$$250 = 31 \times 8 + 2$$
$$31 = 3 \times 8 + 7$$
$$3 = 0 \times 8 + 3$$

و عليه العدد 2007 يكتب في النظام الذي أساسه 8

على الشكل : $\overline{3727}^{8}$

2 – كتابة عدد في نظام تعداد أساسه $x$ :

$x$ عدد طبيعي حيث : $x \geq 2$ . $N$ عدد طبيعي .

- إذا كان $N < x$ فإن $N$ يكتب على الشكل : $N = a_0$ .

في نظام التعداد الذي أساسه $x$ :

- إذا كان $N = x$ فإن: $N = 0 + 1.x$

و نكتب : $N = \overline{01}$ في نظام التعداد الذي أساسه $x$ .

- إذا كان $N > x$ فإن $N$ ينشر وفق الأساس $x$ كما يلي :

$$N = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

حيث يكتب اختصارا : $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^{x}$

و هي الكتابة المختصرة للعدد $N$ في نظام التعداد الذي أساسه $x$ .

الأعداد الطبيعية الأصغر تماما من $x$ تمثل كل واحدة برمز خاص به.

و عدد هذه الرموز هو $x$ و تسمى أساس نظام التعداد ذو الأساس $x$ .

ملاحظة :

إذا كان $N$ مكتوب في النظام الذي أساسه 10 على الشكل :

$$N = a_0 + a_1 + 10 + a_2 .10^2 + ... + a_n 10^n$$

فإن $N$ يكتب على الشكل : $N = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$

بدلا من $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^{10}$ و ذلك لكثرة الاستعمال .

3– الانتقال من النظام الذي أساسه $x$ إلى النظام العشري :

مثال :

نعتبر العدد $N$ المكتوب في النظام الذي أساسه 3

كما يلي : $N = \overline{2002012}^{3}$ . اكتب $N$ في النظام العشري .

الحل :

$$N = 2.3^{0} + 1.3^{1} + 0.3^{2} + 2.3^{3} + 0.3^{4} + 0.3^{5} + 2.3^{6}$$

$$N = 2 + 3 + 0 + 45 + 0 + 0 + 1458$$

$$N = 1517$$

4 – الانتقال من نظام تعداد أساسه $\alpha$ إلى نظام تعداد أساسه $\beta$ :

نعلم أن نظام التعداد الذي أساسه 10 سهل الاستعمال و العمليات الحسابية فيه سهلة و لهذا :

إذا كان $N$ عدد طبيعي مكتوب في نظام تعداد ذو الأساس $\alpha$ و نريد أن نكتب $N$ في نظام تعداد أساسه $\beta$ فنقوم بما يلي :

- نكتب $N$ في نظام التعداد ذو الأساس 10 ( كما سبق )
- نكتب $N$ في نظام التعداد ذو الأساس $\beta$

مثال :

عدد $N$ مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس 2

كما يلي : $\overline{11101101}^{2}$ . اكتب $N$ في نظام التعداد ذو الأساس 5 .

الحل :

- نكتب $N$ في نظام التعداد ذو الأساس 10 :

$$N = 1.2^{0} + 0.2^{1} + 1.2^{2} + 1.2^{3} + 0.2^{4} + 1.2^{5} + 1.2^{6} + 1.2^{7}$$

$$N = 1 + 4 + 8 + 32 + 64 + 128$$

$$N = 237$$

- نكتب $N$ في نظام التعداد ذو الأساس 5 :

$$237 = 47 \times 5 + 2$$

$$47 = 9 \times 5 + 2$$

$$9 = 1 \times 5 + 4$$

$$1 = 0 \times 5 + 1$$

و منه $N$ يكتب : $\overline{1422}^{5}$

ملاحظات :

- النظام العشري هو النظام المستعمل لدى البشر و أساسه عشرة ،
أما أرقامه فهي : 0،1،2،3،4،5،6،7،8،9 .
- النظام الثنائي هو النظام المستعمل لدى الآلات و أرقامه هي 0،1 .
- النظام ذو الأساس 8 ، أرقامه : 0،1،2،3،4،5،6،7
- النظام ذو الأساس 11 ، أرقامه :
9،8،0،1،2،3،4،5،6،7 ، $\alpha$ ( حيث : $\alpha = 10$) .
- النظام ذو الأساس 12 ، أرقامه :
9،8،0،1،2،3،4،5،6،7، $\alpha$ ، $\beta$ حيث : $\alpha = 10$ و $\beta = 11$ .

مثال :

اكتب العدد 1954 في نظام التعداد ذو الأساس 12 .

الحل :

$$1954 = 162 \times 12 + 10$$
$$162 = 13 \times 12 + 6$$
$$13 = 1 \times 12 + 1$$
$$1 = 0 \times 12 + 1$$

و عليه العدد 1954 يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 12 هكذا :
$\overline{116\alpha}^{12}$ حيث : $\alpha = 10$

5- قابلية القسمة :

$N$ عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذو الأساس 10 :
$$N = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$
إذن : $N = a_0 + a_1.10 + a_2.10^2 + \dots + a_n 10^n$

- قابلية القسمة على 2 : لدينا : $10^p \equiv 0\,[2]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $p$ و عليه : $N \equiv a_0\,[2]$
و بالتالي : $N \equiv 0\,[2]$ تكافئ : $a_0 \equiv 0\,[2]$
و منه : $a_0 \in \{0,2,4,6,8\}$

- قابلية القسمة على 5 : لدينا : $10^p \equiv 0[5]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $p$ و
عليه : $N \equiv a_0\,[5]$
و بالتالي : $N \equiv 0\,[5]$ تكافئ : $a_0 \equiv 0\,[5]$ و منه : $a_0 \in \{0,5\}$

- قابلية القسمة على 4 : لدينا : $10^p \equiv 0[4]$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $p$ حيث

: $p \geq 2$ و عليه : $N \equiv a_0 + a_1.10[4]$

و بالتالي $N \equiv 0[4]$ تكافئ : $a_1a_0 \equiv 0[4]$

أي العدد المكون من رقم الآحاد و العشرات مضاعف للعدد 4 .

- قابلية القسمة على 25 : لدينا : : لدينا : $10^p \equiv 0[25]$ من أجل

كل عدد طبيعي $p$ حيث: $p \geq 2$ و عليه: $N \equiv a_0 + a_1.10[25]$

و بالتالي $N \equiv 0[25]$ تكافئ : $a_1a_0 \equiv 0[25]$

أي العدد المكون من رقم الآحاد و العشرات مضاعف للعدد 25 .

- قابلية القسمة على 3 : لدينا : $10^p \equiv 1[3]$ من أجل كل عدد $p$

حيث : $p \geq 1$ و عليه : $N \equiv 0[3]$

تكافئ : $(a_0 + a_1 + ... + a_n) \equiv 0[3]$

- قابلية القسمة على 9 : لدينا : $10^p \equiv 1[9]$ من أجل كل عدد $p$ حيث : $p \geq 1$ و

عليه : $N \equiv 0[9]$

تكافئ : $(a_0 + a_1 + ... + a_n) \equiv 0[9]$

- قابلية القسمة على 11 : لدينا : $10^p \equiv -1[11]$ إذا كان $p$ فرديا

و $N \equiv 1[11]$ إذا كان $p$ زوجيا . و منه : $N \equiv 0[11]$

تكافئ : $\left[a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n\right] \equiv 0[11]$

# تمـارين و مشكلات

**التمرين 1** .

ما هو باقي قسمة كل من الأعداد الآتية على 3 :

$(4111)^{1830}$ , $4^{2007}$ , $2^{1954}$ , $4.7^{n}-8$ حيث $n$ عدد طبيعي.

**التمرين 2** .

ما هو باقي القسمة الاقليدية على 7 لكل من الأعداد الآتية :

$2018^{645}$ , $(19)^{522}\times(23)^{987}$ , $863^{1800}\times 8030^{1260}$

**التمرين 3** .

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $10^{3n}\equiv 1[37]$

ثم استنتج باقي قسمة العدد : $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ على 37 .

**التمرين 4**

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن :

2) $n(n^{2}-1)\equiv 0[3]$ 1) $n^{7}\equiv n[7]$

4) $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$ 3) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

**التمرين 5**

ادرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ باقي قسمة $7^{n}$ على 9 .

ما هو باقي قسمة $(56212)^{1954}$ على 9.

- عين الأعداد الطبيعية $n$ التي يكون من أجلها:

$16^{3n}+16^{n}-2\equiv 0[9]$

**التمرين 6**

ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي $n$ ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين $5^{n}$ و $3^{n}$ على 11 ثم استنتج باقي قسمة العدد $5^{n}-3^{n}$ على 11 . عين الأعداد الطبيعية $n$ التي يكون من أجلها :

$5^{n}-3^{n}-16\equiv 0[11]$

**التمرين 7**

عين قيم العدد الصحيح $x$ في كل حالة مما يلي : $2)\quad x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$

$1)\quad 3x \equiv 4[7]$

$$3)\quad \begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$$

**التمرين 8**

عين قيم العدد الطبيعي $n$ بحيث : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$

**التمرين 9**

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي $n$ باقي القسمة لكل من $2^n$ و $3^n$ على 7 .

2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $9^{2p+1} - 2^{2p+1} \equiv 0[7]$

4) حدد قيم $n$ بحيث : $3^n \equiv 2^n [7]$

**التمرين 10**

اكتب الأعداد الآتية و المكتوبة في النظام العشري في النظام ذو الأساس 4 . 1418 , 1989 , 1961

ثم استنتج كتابتها في النظام الثنائي .

**التمرين 11**

حول إلى النظام الذي أساسه 11 الأعداد التالية :

$\overline{15672}^{8}$ , $8945$ , $\overline{101010}^{2}$ , $\overline{10141}^{5}$

**التمرين 12**

نعتبر العدد $A$ الذي يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 7 على الشكل:

$$A = \overline{63x4}$$

عين العدد الطبيعي $x$ بحيث يكون $A$ قابلا للقسمة على 6 .

**التمرين 13**

العدد $N$ يكتب في نظام التعداد الذي أساسه 17

على الشكل : $N = \overline{342x}$

عين العدد $x$ بحيث يكون $N$ قابلا للقسمة على 12 .

**التمرين 14**

1 – ادرس بواقي قسمة $4^n$ على 7 .

2 – يكتب العدد $N$ على الشكل : $\overline{13321}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 .

ما هو باقي قسمة $N$ على 7 .

**التمرين 15**

في أي نظام تعداد لدينا المساواة : $\overline{122} \times \overline{103} = \overline{13121}$

**التمرين 16**

في أي نظام تعداد يكون لدينا : $\left(\overline{132}\right)^2 = \overline{21054}$

**التمرين 17**

يكتب العددان $A$ و $B$ في نظام مجهول على الشكل :

$A = \overline{302}$ ، $B = \overline{402}$

و يكتب العدد $A \times B$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 على الشكل : $\overline{75583}$.

ما هو أساس نظام التعداد الأول .

**التمرين 18**

يكتب العدد 12551 في نظام تعداد مجهول عل الشكل $\overline{30407}$ ما هو أساس هذا النظام .

**التمرين 19**

أنجز العمليات التالية في نظام التعداد الذي أساسه 2 :

$\overline{11110} + \overline{11111}$ , $\overline{101011} + \overline{100111}$

$\overline{10001} \times \overline{11100}$ , $\overline{1111} \times \overline{1101}$

**التمرين 20**

$a,b,c$ أعداد طبيعية حيث $1 < a \le b \le c$ عين $a,b,c$ و الجداء $abc$ علما أن في نظام التعداد الذي أساسه $a$ لدينا :

$bc = \overline{555}$ و $b + c = \overline{46}$ .

# الحـلـول

**التمرين 1**

تعيين بواقي القسمة على 3 :

- لدينا $4111 \equiv 1[3]$ و منه $(4111)^{1830} \equiv (1)^{1830}[3]$

و عليه : $(4111)^{1830} \equiv 1[3]$

- لدينا : $4 \equiv 1[3]$ و عليه : $(4)^{2007} \equiv (1)^{2007}[3]$

إذن : $4^{2007} \equiv 1[3]$

- لدينا: $2^{1954} = (2^2)^{977}$ و منه : $2^{1954} = 4^{977}$

لكن : $4 \equiv 1[3]$ و عليه : $4^{977} \equiv 1[3]$ ومنه : $2^{1954} \equiv 1[3]$

- لدينا : $7 \equiv 1[3]$ و عليه : $7^n \equiv (1)^n[3]$ إذن : $7^n \equiv 1[3]$

لكن $4 \equiv 1[3]$ و عليه : $4.7^n \equiv 1[3]$

و لدينا : $8 \equiv 2[3]$ و عليه : $4.7^n - 8 \equiv -1[3]$

لكن : $-1 \equiv 2[3]$ و منه : $4.7^n - 8 \equiv 2[3]$

**التمرين 2**

تعيين بواقي القسمة على 7 :

- لدينا $2018 \equiv 2[7]$ و عليه : $2018^{645} \equiv 2[7]$

إذن : $2018^{645} \equiv (2^3)^{216}[7]$ أي : $(2018)^{645} \equiv 8^{216}[7]$

لكن : $8 \equiv 1[7]$ و عليه : $(2018)^{645} \equiv 1[7]$

- لدينا $19 \equiv (-2)[7]$ و عليه : $(19)^{522} \equiv (-2)^{522}[7]$

أي أن $(19)^{522} \equiv 8^{174}[7]$ لكن : $8 \equiv 1[7]$

و عليه : $(1)...(19)^{522} \equiv 1[7]$

و لدينا : $23 \equiv 2[7]$ و عليه : $(23)^{987} \equiv 2^{987}[7]$

ومنه : $(23)^{987} \equiv \left(2^3\right)^{329} [7]$ و عليه : $(23)^{987} \equiv 8^{329} [7]$

لكن : $8 \equiv 1[7]$ و عليه : $(23)^{987} \equiv 1[7] ...(2)$

من (1) و (2) : $(19)^{522} \times (23)^{987} \equiv 1[7]$

- لدينا : $8030 \equiv 1[7]$ و منه : $(8030)^{1260} \equiv 1[7]$

$863 \equiv 2[7]$ و منه : $(863)^{1800} \equiv 2^{1800} [7]$

إذن : $(863)^{1800} \equiv \left(2^3\right)^{600} [7]$ أي : $(863)^{1800} \equiv 8^{600} [7]$

و عليه : $(863)^{1800} \equiv 1[7]$ لأن : $8 \equiv 1[7]$

و بالتالي: $(863)^{1800} \times (8030)^{1260} \equiv 1[7]$

**التمرين 3**

- إثبات أن $10^{3n} \equiv 1[37]$ :

لدينا : $10^{3n} \equiv \left(10^3\right)^n [37]$ أي : $10^{3n} \equiv (1000)^n [37]$

لكن : $1000 \equiv 1[37]$ و منه : $10^{3n} \equiv 1^n [37]$

أي : $10^{3n} \equiv 1[37]$

- استنتاج باقي قسمة $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ على 37 :

$$10^{10} + 10^{20} + 10^{30} = 10^{10}\left(1 + 10^2 + 10^3\right)$$

لدينا : $10^3 \equiv 1[37]$ و $10^{10} \equiv 10^{3\times3+1} [37]$

و منه : $10^{10} \equiv 10^{3\times3} \times 10[37]$ و عليه : $10^{10} \equiv 10[37]$

و منه : $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 10\left(1 + 10^2 + 1\right)[37]$

أي : $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 10\left(1 + 10^3 + 10\right)[37]$

و بالتالي: $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 21[37]$ لأن : $10^3 \equiv 1[37]$

**التمرين 4**

1) نبرهن أن $n^7 \equiv n[7]$ :

- من أجل $n \equiv 0[7]$ فإن : $n^7 \equiv 0[7]$ و عليه : $n^7 \equiv n[7]$

- من أجل $n \equiv 1[7]$ فإن : $n^7 \equiv 1[7]$ و عليه : $n^7 \equiv n[7]$

- من أجل $n \equiv 2[7]$ فإن : $n^7 \equiv 2^7[7]$ و عليه : $n^7 \equiv n[7]$

- من أجل $n \equiv 3[7]$ فإن : $n^7 \equiv 3^7[7]$ و عليه : $n^7 \equiv n[7]$

- من أجل $n \equiv 4[7]$ فإن : $n^7 \equiv 4^7[7]$ و عليه :

$n^7 \equiv 16384[7]$ أي أن : $n^7 \equiv 4[7]$ إذن : $n^7 \equiv n[7]$

- من أجل $n \equiv 5[7]$ فإن : $n^7 \equiv 5^7[7]$ و عليه :

$n^7 \equiv 78125[7]$ و منه : $n^7 \equiv 5[7]$ و عليه : $n^7 \equiv n[7]$

- من أجل $n \equiv 6[7]$ فإن : $n^7 \equiv 6^7[7]$

و عليه : $n^7 \equiv 279936[7]$ و منه : $n^7 \equiv 6[7]$

و عليه : $n^7 \equiv n[7]$

و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $n^7 \equiv n[7]$

2) نبرهن أن : $n(n^2-1) \equiv 0[3]$ :

- من أجل $n \equiv 0[3]$ : $n^2 \equiv 0[3]$ و منه : $n^2 - 1 \equiv -1[3]$

و عليه : $n(n^2-1) \equiv 0[3]$

- من أجل $n \equiv 1[3]$ : $n^2 \equiv 1[3]$ و منه : $n^2 - 1 \equiv 0[3]$

و عليه : $n(n^2-1) \equiv 0[3]$

- من أجل $n \equiv 2[3]$ : $n^2 \equiv 1[3]$ و منه : $n^2 - 1 \equiv 0[3]$

و عليه : $n(n^2-1) \equiv 0[3]$

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $n(n^2-1) \equiv 0[3]$

3) نبرهن أن : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

لدينا : $2^{3n+1}=2^{3n}.2$ و عليه : $2^{3n+1}=\left(2^3\right)^n\times 2$

إذن : $2^{3n+1}=8^n\times 2$ و عليه : $(1)...2^{3n+1}\equiv 2\times 8^n[17]$

و لدينا : $3\times 5^{2n+1}=3\times 5^{2n}\times 5$

$=15\times\left(5^2\right)^n=15\times(25)^n$

بما أن : $15\equiv -2[17]$ و $25\equiv 8[17]$ فإن :

$(2)...3\times 5^{2n+1}\equiv -2\times 8^n[17]$

من (1) و (2) : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0[17]$

4) نبرهن أن : $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

لدينا : $3^{2n+2}=3^{2n}\times 3^2$ و منه : $3^{2n+2}=\left(3^2\right)^n\times 9$

إذن : $3^{2n+2}=9^n\times 9$ أي : $3^{2n+2}=9^{n+1}$

لكن : $9\equiv 2[7]$ و عليه : $3^{2n+2}\equiv 2^{n+1}[7]$

و منه : $3^{2n+2}-2^{n+1}\equiv 0[7]$

**التمرين5**

- دراسة بواقي قسمة $7^n$ على 9 :

$7^0\equiv 1[9]\ ,\ 7^1\equiv 7[9]\ ,\ 7^2\equiv 4[9]\ ,\ 7^3\equiv 1[9]$

بما أن : $7^3\equiv 1[9]$ فإن : $7^{3k}\equiv 1[9]$ من أجل كل عدد طبيعي $k$

و عليه : $7^{3k}.7\equiv 1.7[9]$ أي : $7^{3k+1}\equiv 7[9]$

و كذلك $7^{3k+1}.7\equiv 7\times 7[9]$ و منه : $7^{3k+2}\equiv 4[9]$

إذن بواقي قسمة $7^n$ على 9 هي :1،7،4 .

لما $n=3k$ الباقي هو : 1

لما $n=3k+1$ الباقي هو : 7

لما $n=3k+2$ الباقي هو : 4

- تعيين باقي قسمة $(56212)^{1954}$ على 9 :

لدينا : $56212 = 7[9]$ و منه : $(56212)^{1954} = 7^{1954}[9]$

لكن : $1954 = 3 \times 651 + 1$ و عليه : $7^{1954} \equiv 7[9]$

و عليه : $(56212)^{1954} = 7[9]$

- تعيين $n$ بحيث : $16^{3n} + 16^{n} - 2 \equiv 0[9]$

لدينا : $16 \equiv 7[9]$ و منه : $7^{3n} + 7^{n} - 2 \equiv 0[9]$

لكن : $7^{3n} \equiv 1[9]$ و عليه : $7^{n} - 1 \equiv 0[9]$ إذن : $7^{n} \equiv 1[9]$

و عليه: $n = 3k$ حيث : $k \in \mathbb{N}$

**التمرين 6**

- بواقي قسمة $5^{n}$ على 11 :

$$5^{0} \equiv 1[11] \; ; \; 5^{1} \equiv 5[11] \; ; \; 5^{2} \equiv 3[11] \; ; \; 5^{3} \equiv 4[11]$$
$$5^{4} \equiv 9[11] \; ; \; 5^{5} \equiv 1[11]$$

لدينا : $5^{5} \equiv 1[11]$ و عليه : $5^{5k} \equiv 1[11]$ حيث : $k \in \mathbb{N}$

و بالتالي : $5^{5k+1} \equiv 5[11]$ ، $5^{5k+2} \equiv 3[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 4[11]$ ،

$5^{5k+4} \equiv 9[11]$ .

إذن البواقي هي : 1،5،3،4،9 حسب قيم $n$ و هي :

$5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$ ، $5k+4$ على الترتيب .

- بواقي قسمة $3^{n}$ على 11 :

$$3^{0} \equiv 1[11] \; ; \; 3^{1} \equiv 3[11] \; ; \; 3^{2} \equiv 9[11] \; ; \; 3^{3} \equiv 5[11]$$
$$3^{4} \equiv 4[11] \; ; \; 3^{5} \equiv 1[11]$$

لدينا : $3^{5} \equiv 1[11]$ و عليه : $3^{5k} \equiv 1[11]$ حيث : $k \in \mathbb{N}$

و بالتالي : $3^{5k+1} \equiv 3[11]$ ، $3^{5k+2} \equiv 9[11]$ ، $5^{5k+3} \equiv 5[11]$ ،

$5^{5k+4} \equiv 4[11]$ . إذن البواقي هي: 1 ، 3 ، 9 ، 5 ، 4 حسب قيم $n$

و هي: $5k$ ، $5k+1$ ، $5k+2$، $5k+3$، $5k+4$ على الترتيب.

- استنتاج باقي قسمة $5^n - 3^n$ على 11 :

* من أجل $n=5k$ : $5^n - 3^n \equiv 0[11]$
* من أجل $n=5k+1$ : $5^n - 3^n \equiv 2[11]$
* من أجل $n=5k+2$ : $5^n - 3^n \equiv -6[11]$

أي: $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

* من أجل $n=5k+3$ : $5^n - 3^n \equiv -1[11]$

و عليه : $5^n - 3^n \equiv 10[11]$

* من أجل $n=5k+4$ : $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

- تعيين $n$ بحيث : $5^n - 3^n - 16 \equiv 0[11]$

أي : $5^n - 3^n \equiv 16[11]$ و عليه : $5^n - 3^n \equiv 5[11]$

مما سبق : $n \equiv 5k+2$ ، $k \in \mathbb{N}$

**التمرين 7**

1) تعيين $x$ بحيث : $3x \equiv 4[7]$

لدينا : $4 \equiv -3[7]$ و عليه : $3x \equiv -3[7]$

و منه : $3x+3 \equiv 0[7]$ و بالتالي : $3(x+1) \equiv 0[7]$

و منه : $x+1 \equiv 0[7]$ لأن : 3 و 7 أوليان فيما بينهما .

إذن : $x \equiv -1[7]$ أي : $x \equiv 6[7]$

و عليه : $x \equiv 7\alpha + 6$ مع $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2)لدينا : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ لكن : $-3 \equiv 4[7]$

و عليه : $x^2 - 3x + 4 \equiv 0[7]$ تكافئ : $x^2 + 4x + 4 \equiv 0[7]$

و منه : $(x+2)^2 \equiv 0[7]$ و بالتالي : $x+2 \equiv 0[7]$

إذن : $x \equiv -2[7]$ و عليه : $x \equiv 5[7]$

إذن : $x = 7\alpha + 5$ و $\alpha \in \mathbb{Z}$.

3) لدينا : $\begin{cases} x \equiv 3[5] \ldots (1) \\ x \equiv 1[6] \ldots (2) \end{cases}$

من (1) : $x = 5\alpha + 3$ وَ $\alpha \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في (2) نجد : $5\alpha + 3 \equiv 1[6]$

و عليه : $5\alpha \equiv -2[6]$

لكن : $5 \equiv -1[7]$ و منه : $5\alpha \equiv -\alpha[6]$

و عليه : $-\alpha \equiv -2[6]$ أي أن : $\alpha \equiv 2[6]$

و منه : $\alpha = 6\beta + 2$ و بالتالي : $x = 5(6\beta + 2) + 3$

إذن: $x = 30\beta + 13$ ، $\beta \in \mathbb{Z}$

**التمرين 8**

تعيين $n$ بحيث : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$

لدينا :
$$\begin{aligned} n^2 - 3n + 12 &= n^2 - 2n - n + 12 \\ &= n(n-2) - n + 2 + 10 \\ &= n(n-2) - (n-2) + 10 \\ &= (n-1)(n-2) + 10 \end{aligned}$$

لكن : $(n-1)(n-2) \equiv 0[n-2]$

و عليه : $n^2 - 3n + 12 \equiv 10[n-2]$

لكن : $n^2 - 3n + 12 \equiv 0[n-2]$ و عليه : $10 \equiv 0[n-2]$

إذن : $n-2$ تقسم 10 . و عليه : $n - 2 \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10\}$

إذن: $n \in \{3 ; 4 ; 7 ; 12\}$

**التمرين 9**

1 – دراسة بواقي قسمة $2^n$ على 7 :

$2^0 \equiv 1[7]$ ; $2^1 \equiv 2[7]$ ; $2^2 \equiv 4[7]$ ; $2^3 \equiv 1[7]$



لدينا : $2^3 \equiv 1[7]$ و عليه : $2^{3\alpha} \equiv 1[7]$ و $2^{3\alpha+1} \equiv 2[7]$

و $2^{3\alpha+2} \equiv 4[7]$ حيث $\alpha$ عدد صحيح .

- دراسة بواقي قسمة $3^n$ على 7 :

$$3^0 \equiv 1[7] \; ; \; 3^1 \equiv 3[7] \; ; \; 3^2 \equiv 2[7] \; ; 3^3 \equiv 6[7]$$

$$3^4 \equiv 4[7] \; ; \; 3^5 \equiv 5[7] \; ; \; 3^6 \equiv 1[7]$$

لدينا : $3^6 \equiv 1[7]$ و عليه : $3^{6\beta} \equiv 1[7]$

و منه : $3^{6\beta+1} \equiv 3[7]$ و $3^{6\beta+2} \equiv 2[7]$ و $3^{6\beta+3} \equiv 6[7]$

و $3^{6\beta+4} \equiv 4[7]$ و $3^{6\beta+5} \equiv 5[7]$ حيث $\beta$ عدد صحيح .

2- نبين أن : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

لدينا : $3^{2n} = \left(3^2\right)^n$ و عليه : $3^{2n} = 9^n$

و بما أن : $9 \equiv 2[7]$ فإن : $9^n \equiv 2^n[7]$

و منه : $3^{2n} \equiv 2^n[7]$ و بالتالي : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

3- نبين أن : $9^{2p+1} - 2^{2p+1} \equiv 0[7]$

أي: $\left(3^2\right)^{2p+1} - 2^{2p+1} \equiv 0[7]$

بوضع : $2p+1 = n$ نجد : $3^{2n} - 2^n \equiv 0[7]$

و هو محقق من السؤال السابق .

4- تحديد $n$ بحيث : $3^n \equiv 2^n[7]$

توحيد الدور :

لدينا: $2^{3\alpha} \equiv 1[7]$ و عليه: $\left(2^{3\alpha}\right)^2 \equiv 1^2[7]$ و عليه: $2^{6\alpha} \equiv 1[7]$

و منه: $2^{6\alpha+1} \equiv 2[7]$ ؛ $2^{6\alpha+2} \equiv 4[7]$ $2^{6\alpha+3} \equiv 1[7]$ ؛

$$2^{6\alpha+4} \equiv 2[7] \quad ; \quad 2^{6\alpha+5} \equiv 4[7]$$

بما أن: $3^n \equiv 2^n[7]$ فإن: $n = 6p$ حيث: $p \in \mathbb{N}$ .

**التمرين 10**

- كتابة الأعداد في النظام ذي الأساس 4 :

* العدد 1961 :

$$1961 = 490 \times 4 + 1$$
$$490 = 122 \times 4 + 2$$
$$122 = 30 \times 4 + 2$$
$$30 = 7 \times 4 + 2$$
$$7 = 1 \times 4 + 3$$
$$1 = 0 \times 4 + 1$$

إذن 1961 يكتب : $\overline{132221}^{4}$

* العدد 1989 :

$$1989 = 497 \times 4 + 1$$
$$497 = 124 \times 4 + 1$$
$$124 = 31 \times 4 + 0$$
$$31 = 7 \times 4 + 3$$
$$7 = 1 \times 4 + 3$$
$$1 = 0 \times 4 + 1$$

إذن 1989 يكتب : $\overline{133011}^{4}$

* العدد 1418 :

$$1418 = 202 \times 7 + 4$$
$$202 = 28 \times 7 + 6$$
$$28 = 4 \times 7 + 0$$
$$4 = 0 \times 7 + 4$$

إذن 1418 يكتب : $\overline{4064}^{4}$

- استنتاج الكتابة في النظام الثنائي :

$$1961 = 1 \times 4^0 + 2.4^1 + 2.4^2 + 2.4^3 + 3.4^4 + 1.4^5$$
$$= 1 + 2\left(2^2\right)^1 + 2\left(2^2\right)^2 + 2\left(2^2\right)^3 + (1+2)\left(2^2\right)^4 + 1.\left(2^2\right)^5$$
$$= 2^0 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$$
$$= 1.2^0 + 1.2^3 + 1.2^5 + 1.2^7 + 1.2^8 + 1.2^9 + 1.2^{10}$$

و عليه 1961 يكتب : $\overline{11110101001}^{2}$

$$1418 = 4.4^0 + 6.4^1 + 0.4^2 + 4.4^3$$
$$= 2^2 + \left(2 + 2^2\right).2^2 + 2^2.\left(2^2\right)^3$$

$$= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^8$$
$$= 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + 1.2^8$$

و عليه : 1418 يكتب : $\overline{100011100}^{2}$

**التمرين 11**

- نحول $A = \overline{10141}^{5}$ إلى النظام العشري :

$$A = 1.5^0 + 4.5^1 + 1.5^2 + 0.5^3 + 1.5^4$$
$$A = 1 + 20 + 25 + 625$$
$$A = 671$$

نكتب 671 في نظام التعداد الذي أساسه 11 :

$$671 = 61 \times 11 + 0$$
$$61 = 5 \times 11 + 6$$
$$5 = 0 \times 11 + 5$$

إذن 671 يكتب : $\overline{560}^{11}$

- نحول $B = \overline{101010}^{2}$ إلى النظام العشرى :

$$B = 0.2^0 + 1.2^1 + 0.2^2 + 1.2^3 + 0.2^4 + 1.2^5 = 42$$

نكتب 42 في النظام الذي أساسه 11 :

$$42 = 3 \times 11 + 9$$
$$3 = 0 \times 11 + 3$$

إذن 42 يكتب $\overline{39}^{11}$

- نكتب 8945 في النظام الذي أساسه 11 :

$$8945 = 813 \times 11 + 2$$
$$813 = 73 \times 11 + 10$$
$$73 = 6 \times 11 + 7$$
$$6 = 0 \times 11 + 6$$

و منه 8945 يكتب $\overline{67\alpha2}^{11}$ حيث : $\alpha = 10$



- نكتب $C = \overline{15672}^{8}$ في النظام العشري :

$$C = 2.8^0 + 7.8^1 + 6.8^2 + 5.8^3 + 1.8^4$$
$$= 2 + 56 + 384 + 2560 + 4096$$
$$= 7098$$

نحول $C$ من النظام العشري إلى النظام الذي أساسه 11 :

$$7098 = 645 \times 11 + 3$$
$$645 = 58 \times 11 + 7$$
$$58 = 5 \times 11 + 3$$
$$5 = 0 \times 11 + 5$$

و عليه $C$ يكتب : $\overline{5373}^{11}$ .

**التمرين 12**

تعيين $x$ : $A = \overline{63x4}^7$

و منه : $0 \le x \le 6$

و بالتالي $A$ يكتب : $A = 4.7^0 + x.7^1 + 3.7^2 + 6.7^3$

و عليه : $A = 4 + x.7 + 3.7^2 + 6.7^2$

لدينا : $7 \equiv 1[6]$ و منه : $7^2 \equiv 1[6]$ و $7^3 \equiv 1[6]$

و بالتالي : $A \equiv 4 + x + 3 + 6[6]$ أي : $A \equiv 1 + x[6]$

بما أن: $A \equiv 0[6]$ فإن : $1 + x \equiv 0[6]$

و عليه : $x \equiv -1[6]$ أي : $x \equiv 5[6]$ لأن : $-1 \equiv 5[6]$

و عليه : $x = 5$ لأن : $0 \le x \le 6$ .

**التمرين 13**

تعيين $x$ : $N = \overline{342x}^{17}$

و بالتالي $N$ يكتب :

$$N = x.17^0 + 2.17^1 + 4.17^2 + 3.17^3$$

إذن : $0 \le x \le 16$ و $N = x + 2.17^1 + 4.17^2 + 3.17^3$

لدينا : $17 \equiv 5[12]$ و منه : $17^2 \equiv 5^5[12]$



إذن : $17^2 \equiv 1[12]$ و عليه : $17^3 \equiv 5[12]$

و عليه : $N \equiv x+10+4+15[12]$

$N \equiv x+29[12]$ أي أن : $N \equiv x+5[12]$

تكون : $N \equiv 0[12]$ إذا كان : $x+5 \equiv 0[12]$

أي : $x \equiv -5[12]$ أي : $x \equiv 7[12]$

و عليه : $x = 12\alpha + 7$ و $\alpha \in \mathbb{N}$

لكن : $0 \le x \le 16$ و منه : $0 \le 12\alpha + 7 \le 16$

أي : $-7 \le 12\alpha \le 9$ و منه : $-0,58 \le \alpha \le 0,75$

و عليه : $\alpha = 0$ و منه : $x = 7$ .

**التمرين 14**

1- دراسة بواقي قسمة $4^n$ على 7 :

$4^0 \equiv 1[7]$ ; $4^1 \equiv 4[7]$ ; $4^2 \equiv 2[7]$ ; $4^3 \equiv 1[7]$

و منه: $4^{3\alpha} \equiv 1[7]$ و عليه : $4^{3\alpha+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3\alpha+2} \equiv 2[7]$

2 – تعيين باقي قسمة $N$ على 7 :

لدينا : $N = 1.4^0 + 2.4^1 + 3.4^2 + 3.4^3 + 1.4^4$

ومنه : $N \equiv 1 + 2(4) + 3(2) + 3(1) + (4)[7]$

أي : $N \equiv 22[7]$ إذن : $N \equiv 1[7]$

و منه باقي القسمة هو 1 .

**التمرين 15**

- نفرض $x$ هو أساس هذا النظام فيكون :

$$\left(2.x^0 + 2.x^1 + 1.x^2\right) \times \left(3.x^0 + 0.x^1 + 1.x^2\right)$$

$$= \left(1.x^0 + 2.x^1 + 1.x^2 + 3.x^3 + 1.x^4\right)$$

حيث : $x \ge 4$ و عليه :

$$\left(2 + 2x + x^2\right)\left(3 + x^2\right) = \left(1 + 2x + x^2 + 3x^3 + x^4\right)$$

وعليه :



$$6 + 2x^2 + 6x + 2x^3 + 3x^2 + x^4 = 1 + 2x + x^2 + 3x^3 + x^4$$

و بالتالي : $-x^3+4x^2+4x+5=0$

نلاحظ أن 5 حل خاص و عليه المعادلة تكافئ :

$$(x-5)\left(-x^2-x-1\right)=0$$

و منه إما : $x-5=0$ أو : $-x^2-x-1=0$

حل المعادلة : $-x^2-x-1=0$

لدينا : $\Delta=-3$ و منه ليس للمعادلة حل . إذن : $x=5$ .

**التمرين 16**

نفرض $x$ هو أساس هذا النظام فيكون :

$$\left(2+3.x+1.x^2\right)^2=4+5x+0.x^2+1.x^3+2.x^4$$

$$\left(x^2+3x+2\right)^2=4+5x+x^3+2x^4$$

$$x^4+6x^3+13x^2+12x+4=4+5x+x^3+2x^4$$

و منه : $-x^4+5x^3+13x^2+7x=0$

أي : $x\left(-x^3+5x^2+13x+7\right)=0$

إذن : $-x^3+5x^2+13x+7=0$ لأن : $x\geq 6$

نجد 7 حل خاص و منه المعادلة تكافئ :

$$(x-7)\left(-x^2-2x-1\right)=0$$

و منه إما : $x-7=0$ أو : $-x^2-2x-1=0$

نحل المعادلة : $-x^2-2x-1=0$

لدينا : $\Delta=0$ و منه للمعادلة حل مضاعف $x_0=-1$ مرفوض .

و عليه : $x=7$

**التمرين 17**

نفرض $x$ هو أساس هذا النظام :

$$A=2.x^0+0.x^1+3.x^2=2+3x^2$$

$B=2.x^0+0.x^1+4.x^2=2+4x^2$ حيث : $x\geq 5$



لدينا من جهة : $AB=\left(2+3x^2\right)\left(2+4x^2\right)$

أي: $AB = 4 + 8x^2 + 6x^2 + 12x^4$

$$AB = 4 + 14x^2 + 12x^4$$

و من جهة أخرى :

$$AB = 3.9^0 + 8.9^1 + 5.9^2 + 5.9^3 + 7.9^4$$

$$AB = 3 + 72 + 405 + 3645 + 45927$$

$$AB = 50052$$

و منه : $12x^4 + 14x^2 + 4 = 50052$

$$12x^4 + 14x^2 - 50048 = 0$$

بوضع : $x^2 = y$ نجد : $12y^2 + 14y - 50048 = 0$

لدينا : $\Delta' = (7)^2 + 50048 \times 12$ أي: $\Delta' = 600625 = (775)^2$

للمعادلة حلين : $y_1 = \frac{-7 - 775}{12} = \frac{-782}{12}$ ( مرفوض )

$y_2 = \frac{-7 + 775}{12} = 64$ . و منه : $y = 64$

و منه : $x^2 = 64$ و عليه : $x = 8$ .

**التمرين 18**

نفرض $x$ هو أساس هذا النظام :

$$12551 = 7.x^0 + 0.x^1 + 4.x^2 + 0.x^3 + 3.x^4$$

$$12551 = 7 + 4x^2 + 3x^4 , x \geq 8$$

و منه : $3x^4 + 4x^2 - 12544 = 0$

بوضع : $y = x^2$ نجد : $3y^2 + 4y - 12544 = 0$

لدينا : $\Delta' = (2)^2 - (-12544)(3) = 37636 = (194)^2$

للمعادلة حلين هما :

$y_1 = \frac{-2 - 194}{3} = \frac{-196}{3}$ (مرفوض)

$y_2 = \frac{-2 + 194}{3} = 64$ و منه : $x^2 = 64$ و عليه : $x = 8$ .

**التمرين 19**

انجاز العمليات :

$$\begin{array}{r} {}^{2}\overline{101011} \\ + \quad {}^{2}\overline{100111} \\ \hline = {}^{2}\overline{1010010} \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{2}\overline{11110} \\ + \quad {}^{2}\overline{11111} \\ \hline = {}^{2}\overline{111101} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{2}\overline{1111} \\ \times \quad {}^{2}\overline{1101} \\ \hline 1111 \\ 0000\ . \\ 1111\ .\ . \\ 1111\ .\ .\ . \\ \hline {}^{2}\overline{11000011} \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{2}\overline{10001} \\ \times \quad {}^{2}\overline{11100} \\ \hline 00000 \\ 00000\ . \\ 10001\ .\ . \\ 10001\ .\ .\ . \\ 10001\ .\ .\ .\ . \\ \hline {}^{2}\overline{111011100} \end{array}$$

**التمرين 20**

تعيين $c$ , $b$ , $a$ ثم الجداء $abc$ :

لدينا : $bc = \overline{555}$ ، $b + c = \overline{46}$

و عليه :

$$(1)\ldots\begin{cases} b + c = 6 + 4a \\ b.c = 5 + 5a + 5a^2 \end{cases}$$

و منه $b$ و $c$ حلين لمعادلة في $\mathbb{N}$ من الشكل :

$$x^2 - (6 + 4a)x + 5a^2 + 5a + 5 = 0$$

أي : $(2)\ldots\ x^2 - 2(3 + 2a)x + 5a^2 + 5a + 5 = 0$

لدينا : $\Delta' = (3 + 2a)^2 - (5a^2 + 5a + 5)$

و منه : $\Delta' = -a^2 + 7a + 4$

حتى تقبل هذه المعادلة حل يجب أن يكون $\Delta' \geq 0$

مميز $\Delta'$ هو : $\Delta_a = 49 + 16 = 65$

إذن $\Delta'$ له جذرين : $a_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{65}}{-2}$ ، $a_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{65}}{-2}$

| $a$ | $-\infty$ $\quad a_2 \quad\quad\quad a_1 \quad +\infty$ |
|---|---|
| $\Delta'$ | - 0 + 0 - |

حيث : $a_1 \simeq 7,5$ ، $a_2 \simeq -0,53$

إذن من أجل $a_2 < a < a_1$ فإن : $\Delta' > 0$

و عليه المعادلة (2) تقبل حلا . لكن : $a \geq 7$

و عليه $a = 7$ هو حل للجملة (1) .

و المعادلة (2) تصبح : $x^2 - 34x + 285 = 0$ ؛ $\Delta' = 4$

للمعادلة حلين : $x_1 = \dfrac{17-2}{1} = 15$ ؛ $x_2 = \dfrac{17+2}{1} = 19$

و منه : $b = 15$ وَ $c = 19$ لأن : $b < c$

و منه : $abc = 7 \times 15 \times 19$ أي : $abc = 1995$ .