الجداء السلمي في الفضاء

الكفاءات المستهدفة :

- توظيف الجداء السلمي لإثبات التعامد .
- توظيف الجداء السلمي لتعيين معادلة ديكارتية لمستو .
- توظيف الجداء السلمي لحساب المسافة بين نقطة ومستو وبين نقطة ومستقيم .
- توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات نقط .

تصميم الدرس

- أنشطة.

1– الجداء السلمي في المستوى (مراجعة).

2– المساقط العمودية في الفضاء.

3 – الجداء السلمي في الفضاء.

4 – العبارة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء.

5- المعادلة الديكارتية لمستو.

6 – المسافة بين نقطة ومستقيم (أو مستوى).

- تمارين ومشكلات.
- الحلول.

أنشطة

النشاط :

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط $A(1;0)$ ، $B(2;-2)$ ، $C(3;1)$ ، $D(\alpha;-1)$

حيث α عدد حقيقي .

1- عين طبيعة المثلث ABC .

2- أكتب معادلة الدائرة (γ) ذات القطر $[AB]$.

3- عين α حتى يكون $ABCD$ مربعا .

4- أكتب معادلة المستقيم (BC) .

5- عين α حتى تكون المسافة بين D و (BC) مساوية إلى $\sqrt{10}$.

الحل :

1- تعيين طبيعة المثلث ABC :

لدينا $\overrightarrow{AB}(1;-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;1)$ وعليه $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{5}$ و $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{5}$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1.(2)+(-2)(1)=0$

إذن المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين .

2- تعيين معادلة الدائرة (γ) ذات القطر $[AB]$:

الدائرة (γ) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

أي $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

لكن: $\overrightarrow{MA}(1-x;-y)$ ، $\overrightarrow{MB}(2-x;-2-y)$

ومنه: $(1-x)(2-x)+(-y)(-2-y)=0$

وعليه $2-x-2x+x^2+2y+y^2=0$

إذن $x^2-3x+y^2+2y+2=0$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(y+1)^2-1+2=0$$

وعليه $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$

حيث : مركزها هو $\omega\left(\frac{3}{2};-1\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

3- تعيين α حتى يكون $ABCD$ مربع :

يكون $ABCD$ مربعا إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

لدينا $\overrightarrow{AC}(2\ ;1)$ و $\overrightarrow{BD}(\alpha-2\ ;\ 1)$

ومنه $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$ يكافئ : $\alpha-2=2$ ومنه $\alpha=4$

4- معادلة المستقيم (BC) :

لدينا $\overrightarrow{BC}(1\ ;\ 3)$

من أجل كل نقطة $M(x;y)$ من المستوى

تكون M نقطة من (BC) إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{BM}\ //\ \overrightarrow{BC}$

وعليه لكون $\overrightarrow{BM}(x-2;y+2)$

فإن $3(x-2)-1(y+2)=0$.

وعليه معادلة (BC) هي $3x-y-8=0$.

5- تعيين α :

تعطى المسافة بين D و (BC) بالعبارة :

$$DH=\frac{|3\alpha+1-8|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2}}=\frac{|3\alpha-7|}{\sqrt{10}}$$

لكن $DH=\sqrt{10}$ ومنه $\frac{|3\alpha-7|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$ إذن $|3\alpha-7|=10$

ومنه $3\alpha-7=10$ أو $3\alpha-7=-10$

وعليه $\alpha=\frac{17}{3}$ أو $\alpha=-1$

الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

* من أجل كل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من المستوي .

إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

* يتعامد الشعاعان غير المعدومين إذا وفقط إذا كان $\vec{u} . \vec{v} = 0$.

* كل شعاع غير معدوم عمودي على مستقيم (Δ) يسمى شعاع ناظمي للمستقيم (Δ) .

* إذا كان $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ وكانت H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) فإنه :

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ $(\overrightarrow{AH} \neq 0)$ من نفس الاتجاه

فإن : $\vec{u} . \vec{v} = AB.AH$

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AH}$ مختلفين في الاتجاه

فإن : $\vec{u} . \vec{v} = -AB.AH$

أي أن في الحالتين : $\vec{u} . \vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

* إذا كانت $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ثلاثة أشعة وكان λ عددا حقيقيا فإن :

* $\lambda\vec{u}.\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$ * $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

* $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ * $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

* $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$ * $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

* إذا كان $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ في معلم متعامد متجانس فإن :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

* في معلم متعامد متجانس معادلة مستقيم (Δ) حيث $\vec{v}(a;b)$ شعاع ناظمي له هي من الشكل $ax+by+c=0$ حيث C عدد حقيقي .

* في معلم متعامد متجانس تعطى المسافة بين النقطة $M(x_0;y_0)$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $ax+by+c=0$ بالعبارة :

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

المساقط العمودية في الفضاء

أ) المسقط العمودي على مستقيم :

(D) مستقيم في الفضاء . M نقطة من الفضاء .

نسمي المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D) النقطة M' نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) الذي يشمل M و يعامد (D).

فإذا كانت M نقطة من (D) فإن M' تنطبق على M .

ب) المسقط العمودي لنقطة على مستو :

المسقط العمودي لنقطة N على مستو (P) هي النقطة N' نقطة تقاطع المستوى (P) والمستقيم (Δ) الذي يشمل N و يعامد المستوى (P) .

فإذا كانت N نقطة من (P) فإن N' تنطبق على N .

الجداء السلمي في الفضاء

أ) تعريف :

الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من الفضاء هو الجداء السلمي لهما كما سبق تعريفه في المستوى الذي يشملهما .

ويكون $\vec{u}.\vec{v}=0$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين .

ب) نتائج :

- إذا كانت A,B,C نقط من الفضاء حيث $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا فإن النقط A,B,C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

ويكون : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$

- إذا كانت C نقطة من المستقيم (AB) وكانت A,B,C متمايزة مثنى مثنى فإنه :

* إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ في نفس الاتجاه

فإن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC$

* إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من اتجاهين مختلفين

فإن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB.AC$

ج) مبرهنات :

إذا كانت $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ثلاثة أشعة وكان k عددا حقيقيا فإن :

* $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ * $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

* $u.(k\vec{v})=(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$

د) شعاع ناظمي لمستو :

كل شعاع غير معدوم $\vec{w}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) يسمى شعاع ناظمي للمستوى (P) .

العبارة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر الشعاعان $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ ، $\vec{v}=\left(x';y';z'\right)$.

تعطى عبارة الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ في الفضاء بالعبارة :

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

* البرهان :

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$$

$$=xx'\vec{i}.\vec{i}+xy'\vec{i}.\vec{j}+xz'\vec{i}\;\vec{k}+x'y\,\vec{i}.\vec{j}+yy'\vec{j}.\vec{j}$$

$$+yz'\vec{j}.\vec{k}+x'z\,\vec{i}.\vec{k}+y'z\,\vec{j}.\vec{k}+zz'\vec{k}.\vec{k}$$

ونعلم أن $\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$ و $\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=0$

وعليه : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

* نتائج :

أ) المربع السلمي :

$$\vec{u}^{2}=\vec{u}.\vec{u}=x.x+y.y+z.z'$$

ومنه : $\vec{u}^{2}=x^{2}+y^{2}+z^{2}$

ب) إذا كانت $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ ، $B\left(x_1;y_1;z_1\right)$ في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ فإن : $\overrightarrow{AB}\left(x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\right)$

وعليه المسافة بين A و B تعطى بالعبارة :

$$AB=\sqrt{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(y_1-y_0\right)^2+\left(z_1-z_0\right)^2}$$

تطبيق 1 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ حيث $\vec{u}(1;3;-2)$ ، $\vec{v}(-1;2;4)$.

- أحسب $\vec{u}.\vec{v}$ ؛ $\vec{v}.\vec{u}$ ؛ $\|\vec{u}\|$.

الحل :

$$\vec{u}.\vec{v}=1.(-1)+3(2)+(-2)(4)=-3$$

$$\vec{v}.\vec{u}=(-1)(1)+2(3)+4(-2)=-3$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(1)^2+(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

تطبيق 2 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقطتان $A(1;2;-4)$ ، $B(2;-3;5)$.

- أحسب المسافة بين A و B .

الحل :

المسافة بين A و B هي :

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-3-2)^2+(5+4)^2}$$

$$AB=\sqrt{107}$$

المعادلة الديكارتية لمستو

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

تعريف : نسمي معادلة ديكارتية لمستو (P) كل معادلة ذات المجاهيل الحقيقية x ، y ، z

ومجموعة حلولها هي كل الثلاثيات $(x;y;z)$ التي

تحقق : (النقطة $M(x;y;z)$ تنتمي إلى المستوى (P)) .

مبرهنة :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لكل مستو معادلة ديكارتية من

الشكل : $ax+by+cz+d=0$

حيث $\vec{n}(a;b;c)$ هو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

والعكس كل معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث c,b,a أعداد حقيقية

ليست جميعها معدومة هي معادلة مستو مع $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له .

d عدد حقيقي وإذا كان $d=0$ فإن المستوي يشمل المبدأ O .

البرهان :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(\alpha;\beta;\gamma)$

والشعاع $\vec{n}(a;b;c)$ والمستوي (P) الذي

يشمل A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له .

تكون النقطة $M(x;y;z)$ من الفضاء ونقطة من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$

ومنه : $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

وعليه : $ax+by+cz+(-\alpha a-\beta b-\gamma c)=0$

وهي من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $d=(-\alpha a-\beta b-\gamma c)$

أمثلة :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

المستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$ له معادلة هي : $z=0$

المستوي $(O;\vec{i},\vec{k})$ له معادلة هي : $y=0$

المستوي $(O;\vec{j},\vec{k})$ له معادلة هي : $x=0$

المسافة بين نقطة ومستقيم (أو مستوي)

تعريف :

نسمي المسافة بين النقطة M والمستقيم (Δ) (أو المستوي (P))

طول القطعة $[MH]$ حيث H هي المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (Δ) (أو المستوي (P)) .

مبرهنة 1 :

ليكن (P) المستوي الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له .

المسافة بين نقطة M والمستوي (P) تعطى بالعبارة :

$$MH = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة M على (P).

البرهان :

لدينا : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right).\vec{n}$

$$= \overrightarrow{AH}.\vec{n} + \overrightarrow{HM}.\vec{n}$$

لكن : $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = 0$ ومنه : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \overrightarrow{HM}.\vec{n}$

ولدينا : $\overrightarrow{HM}.\vec{n} = \left\|\overrightarrow{HM}\right\|.\left\|\vec{n}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{HM};\vec{n}\right)$

إذن : $\overrightarrow{HM}.\vec{n} = HM.\left\|\vec{n}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{HM};\vec{n}\right)$

لكن : $\cos\left(\overrightarrow{HM};\vec{n}\right) = 1$ أو $\cos\left(\overrightarrow{HM};\vec{n}\right) = -1$

وعليه : $\left|\overrightarrow{HM}.\vec{n}\right| = HM.\left\|\vec{n}\right\|$ ومنه : $MH = \frac{\left|\overrightarrow{HM}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

إذن : $MH = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

مبرهنة 2 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ المسافة بين النقطة $M\ (\alpha\ ;\beta\ ;\gamma\ )$ والمستوي (P) الذي معادلته : $ax+by+cz+d=0$ تعطى بالعبارة : $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c\gamma + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

البرهان :

لدينا $\vec{n}(a\ ;b\ ;c)$ ، لتكن $A(x_0;y_0;z_0)$ نقطة من المستوي (P) .

لدينا $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ ومنه $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

من المبرهنة 1 لدينا : $MH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

حيث H المسقط العمودي للنقطة M على (P) .

لكن : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(\alpha-x_0)+b(\beta-y_0)+c(\gamma-z_0)$

$$=a\alpha+b\beta+c\gamma-(ax_0+by_0+cz_0)$$

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\alpha+b\beta+c\gamma+d$$

ولدينا : $\left\|\vec{n}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

وبالتالي : $MH=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

مثال :

أحسب المسافة بين النقطة $M\,(0;-1;2)$ والمستوي (P) الذي معادلته :

$$2x-y+4z+12=0$$

الحل :

لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (P) .

$$MH=\frac{|2(0)-(-1)+4(2)+12|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(4)^2}}=\frac{|1+8+12|}{\sqrt{4+1+16}}=\frac{21}{\sqrt{21}}=\sqrt{21}$$

إذن : $MH=\sqrt{21}$

تمـارين و مشكلات

التمرين 1

A,B,C ثلاث نقط في المستوى حيث :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -16 \text{ ، } AC = 8 \text{ ، } AB = 4$$

1) أحسب قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

2) استنتج : $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2$

و $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2$

التمرين 2

A و B نقطتان في المستوى .

عين مجموعة النقط M في المستوى في كل حالة مما يلي :

$$1)\ MA^2 + MB^2 = AB^2$$

$$2)\ MA^2 - MB^2 = \frac{1}{2}AB^2$$

$$3)\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}AB^2$$

التمرين 3

ABC مثلث حيث : $AB = 7$ ، $BC = 9$ ، $AC = 11$

عين أقياسا لزوايا المثلث ومساحته .

التمرين 4

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

لتكن النقطة $M(x, y, z)$.

1- عين إحداثيات كل من النقط M_1 ، M_2 ، M_3 المساقط العمودية للنقطة M على كل من المستويات $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ و $\left(O; \vec{i}, \vec{k}\right)$ و $\left(O; \vec{j}, \vec{k}\right)$

على الترتيب .

2- عين إحداثيات كل من النقط M_4 ، M_5 ، M_6 المساقط العمودية للنقطة M على كل من المستقيمات $\left(O; \vec{i}\right)$ و $\left(O; \vec{j}\right)$ و $\left(O; \vec{k}\right)$ على الترتيب .

التمرين 5

$ABCDEFGH$ مكعب طول كل من حروفه a .

- احسب كل من الجداءات السلمية التالية : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}$.

التمرين 6

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط A,B,C,D,E حيث :

$A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(-1;-1;-1)$, $E(1;1;1)$

- بين أن المستوي (ABC) وحيد .
- هل المستقيم (ED) عمودي على المستوي (ABC) .

التمرين 7

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- عين قيمة العدد الحقيقي x بحيث يتعامد الشعاعان :

$\vec{u}(-5;-2;x)$ و $\vec{v}(1;6;-1)$.

التمرين 8

في الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر الأشعة :

$\vec{u}\left(\frac{6}{11};\frac{7}{11};\frac{6}{11}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{11};\frac{6}{11};\frac{-9}{11}\right)$ و $\vec{w}\left(\frac{-9}{11};\frac{6}{11};\frac{2}{11}\right)$

- بين أن $\left(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ معلم متعامد متجانس للفضاء .

التمرين 9

أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-4;4;-4)$

و يعامد الشعاع $\vec{u}(-1;2;1)$.

التمرين 10

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- أكتب معادلة المستوي (P') الذي يشمل النقطة $F(-2;4;4)$

ويوازي المستوي (P) الذي معادلته : $-4x+6y-5z+3=0$

التمرين 11

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- أكتب معادلة المستوي (P') الذي يشمل النقطة O والنقطة

$A(1;-1;2)$ و يعامد المستوي (P) الذي معادلته : $2x-3y+z=0$

التمرين 12

نعتبر النقط $A(1;-1;1)$ ، $B(3;1;0)$ ، $C(0;2;1)$.

- عين المسافة بين C والمستقيم (AB) .

التمرين 13

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي

معادلته : $5x-y+3z-1=0$ والنقطة $A(0;1;-3)$.

- احسب المسافة بين $A(0;1;-3)$ و (P) .

التمرين 14

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى النقط $A(1;2;-1)$ ،

$B(0;-1;1)$ ، $C(-2;0;1)$ ، $D(1;1;9)$

- بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

- احسب المسافة بين D والمستوي (ABC) .

التمرين 15

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر

النقط $A(5;2;-4)$ ، $B(2;3;0)$ ، $C(0;-5;1)$ ، $D(3;1;2)$

- عين المعادلة الديكارتية لمحل النقط $M(x;y;z)$

حيث : $2MA^2-MB^2+MC^2-MD^2=20$.

التمرين 16

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر

النقط $A\left(-1;2;+1\right)$ ، $B\left(3;-1;4\right)$ ، $C\left(1;0;4\right)$.

- عين مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ في كل حالة مما يلي :

1) $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0$ 2) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=10$

3) $AM^2+BC^2=100$ 4) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

5) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=BC^2$.

التمرين 17

$ABCDEFGH$ مكعب مركزه O وطول حرفه m .

احسب الجداءات السلمية الآتية :

1) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}$ 2) $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA}$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$ 4) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$

التمرين 18

الفضاء مزود بمعلم متعامد متجانس $\left(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، $\left\|\vec{i}\right\|=1$.

$ABCDEFGH$ مكعب مركزه O وطول حرفه m $\left(m>1\right)$.

- أحسب الجداءات السلمية الآتية باستعمال العبارة التحليلية للجداء السلمي .

1) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG}$ 2) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EC}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$

4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BG}$ 5) $\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{GC}$

الحـلـول

التمرين 1

1- حساب قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$-16 = 4\times 8.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

إذن $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-16}{32}$

وعليه $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1}{2}$

ومنه $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$$k \ni \mathbb{Z}$$

2- الاستنتاج :

$$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2$$

$$= AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$$

$$= 2AB^2 + 2AC^2$$

$$= 2(16) + 2(64) = 160$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2$$

$$= AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AC^2$$

$$= 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4(-16) = -64$$

التمرين 2

تعيين مجموعات النقط :

لتكن I منتصف $[AB]$.

1) لدينا $MA^2+MB^2=AB^2$

$$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=AB^2$$

$$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)^2=AB^2$$

$$MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2=AB^2$$

$$2MI^2+2IA^2=AB^2$$

$$2MI^2=AB^2-2IA^2$$

$$2MI^2=AB^2-2\left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$2MI^2=AB^2-\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}AB^2$$

$$MI^2=\frac{1}{4}AB^2$$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\frac{1}{2}AB$ أي قطرها $[AB]$.

2) لدينا : $MA^2-MB^2=\frac{1}{2}AB^2$

$$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=\frac{1}{2}AB^2$$

$$MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-IA^2=\frac{1}{2}AB^2$$

$4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}AB^2$ و منه : $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=\frac{1}{8}AB^2$

وعليه : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}=-\frac{1}{8}AB^2$

نفرض H المسقط العمودي للنقطة M على (IA) فيكون :

إذن : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IH}$ $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{8}AB^2$

إذن : $IA.IH=\frac{1}{2}AB^2$ ومنه: $IH=\frac{2IA}{AB^2}$

أي : $IH=\frac{AB}{AB^2}$ وعليه : $IH=\frac{1}{AB}$

ومنه مجموعة النقط M هي نقط المستقيم العمودي على (AB) في النقطة H .

3) لدينا : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\frac{1}{4}AB^2$

$$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\frac{1}{4}AB^2$$

$$\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=\frac{1}{4}AB^2$$

$$MI^2-IA^2=\frac{1}{4}AB^2$$

$$MI^2=IA^2+\frac{1}{4}AB^2$$

$$MI^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\frac{1}{4}AB^2=\frac{1}{2}AB^2$$

ومنه مجموعة النقط هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.

التمرين 3

لدينا

$$\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$$

$$BC^2=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2$$

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}\right)$$

$$81=121+49-2.11.7\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$$

$$81=170-154\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$$

$$81-170=-154.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$$

$$-89=-154\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{89}{154}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\simeq 0,578$$

وعليه: $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\simeq 54,7^\circ$ $\hat{A}\simeq 54,7^\circ$

وبنفس الطريقة : $AC^2=BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos\hat{B}$

$$121=49+81-2.7.9\cos\hat{B}$$

و منه : $-9=-2.7.9\cos\hat{B}$ أي : $\cos\hat{B}=\frac{1}{14}$

و بالتالي : $\hat{B}\simeq 85,9^\circ$ لكن : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

ومنه : $\hat{C}=180^\circ-\hat{A}-\hat{B}$ أي : $\hat{C}=180^\circ\text{-}54,7^\circ\text{-}85,9^\circ$

إذن : $\hat{C}\simeq 39,4^\circ$.

مساحة المثلث S :

لدينا مساحة المثلث تعطى بالعبارة التالية :

$S=\frac{1}{2}BC.BA.\sin\hat{B}$ وعليه : $S\simeq\frac{1}{2}.9.7.\sin 85,9^\circ$

$S\simeq 31,4$ (وحدة مساحة)

التمرين 4

1- تعيين إحداثيات M_1 ، M_2 ، M_3 :

لدينا : $M_1(x;y;o)$ ، $M_2(x;o;z)$ ، $M_3(o;y;z)$

2- تعيين إحداثيات M_4 ، M_5 ، M_6 :

لدينا : $M_4(x;o;o)$ ، $M_5(o;y;o)$ ، $M_6(o;o;z)$

التمرين 5

حساب الجداءات السلمية :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB.BC.\cos\frac{\pi}{2} = a.a.o = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD.\cos\pi = a.a.(-1) = -a^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB.AH.\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = AB.AG.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$$

لكن : $AG^2 = AB^2 + BC^2$

و منه : $AG^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ أي : $AG = a\sqrt{2}$

ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG} = a.a\sqrt{2}.\cos\frac{\pi}{4} = a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF} = DC.DF.\cos\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}\right)$$

لكن : $DF = AG = a\sqrt{2}$

ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF} = a.a\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = a^2$

التمرين 6

1- نبين أن المستوي (ABC) وحيد :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

بما أن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل كون إحداثيات $\overrightarrow{AB}$

ليست متناسبة مع إحداثيات $\overrightarrow{AC}$ ومنه :

النقط A,B,C تشكل مستويا وحيدا (ABC) .

لدينا : $\overrightarrow{ED}(-2;-2;-2)$

هل $\overrightarrow{ED}$ عمودي على المستوي (ABC) ؟

$$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AB}=(-2)(-1)+(-2)(1)+(-2)\times 0=0$$

$$\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AC}=(-2)(-1)+(-2)\times 0+(-2)(1)=0$$

الشعاع $\overrightarrow{ED}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ من المستوي ABC ومنه فهو عمودي على المستوي (ABC) .

التمرين 7

تعيين x :

$$\vec{u}.\vec{v}=5(1)+(-2).6+x(-1)$$

$$=5-12-x\ =-7-x$$

يتعامد الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$

وعليه : $-7-x=0$ ومنه : $x=-7$

التمرين 8

تبيان أن $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ معلما متعامدا متجانسا :

الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ليس لها نفس الحوامل .

ولدينا : $$\|\vec{v}\|=\sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{-9}{11}\right)^2}=1$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{7}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2}=1$$

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{\left(\frac{-9}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{2}{11}\right)^2}=1$$

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(\frac{6}{11}\right)\times\left(\frac{2}{11}\right)+\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{6}{11}\right)+\left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{-9}{11}\right)=0$$

$$\vec{u}.\vec{w}=\left(\frac{6}{11}\right)\times\left(\frac{-9}{11}\right)+\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{6}{11}\right)+\left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{2}{21}\right)=0$$

$$\vec{v}.\vec{w}=\left(\frac{2}{11}\right)\times\left(\frac{-9}{11}\right)+\left(\frac{6}{11}\right)\left(\frac{6}{11}\right)+\left(\frac{-9}{11}\right)\left(\frac{2}{11}\right)=0$$

إذن الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ ليس لها نفس الحوامل وطويلة كل منها تساوي 1 وهي متعامدة مثنى مثنى وبالتالي $\left(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ معلما متعامدا متجانسا للفضاء .

التمرين 9

معادلة (P) :

(P) هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$$

إذن لدينا : $\overrightarrow{AM}(x+4;y-4;z+4)$ ، $\vec{u}(-1;2;1)$

وبالتالي : $-1(x+4)+2(y-4)+1(z+4)=0$

$$-x-4+2y-8+z+4=0$$

$$-x+2y+z-8=0$$

وهي معادلة المستوي (P) .

التمرين 10

معادلة (P') :

الشعاع $\vec{u}(-4;+6;-5)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وبما أن (P) و (P') متوازيان فإن $\vec{u}$ عمودي على (P') .

وعليه معادلة (P') من الشكل : $-4x+6y-5z+c=0$

وبما أن $F\in(P')$ فإن $-4(-2)+6(4)-5(4)+c=0$

إذن $c=-12$ ومنه معادلة (P') هي $-4x+6y-5z-12=0$

التمرين 11

معادلة (P') :

الشعاع $\vec{n}(2;-3;1)$ عمودي على (P) .

نفرض أن الشعاع $\vec{n'}(a;b;c)$ عمودي على (P') .

بما أن (P) و (P') متعامدان فإن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متعامدان .

ومنه $\vec{n}.\vec{n'}=0$ وعليه : $2a-3b+c=0$

ولدينا (P') يشمل O و A ومنه $\vec{n'}$ و $\overrightarrow{OA}$ متعامدان .

وعليه $\vec{n'}.\overrightarrow{OA}=0$ إذن $o.a+1.b-3.c=0$ أي $b=3c$

إذن لدينا : $\begin{cases}2a-3b+c=0\\ b=3c\end{cases}$ أي أن : $\begin{cases}2a-8c=0\\ b=3c\end{cases}$

وعليه : $a=4c$ و $b=3c$

نضع $c=1$ فنجد : $a=4$ و $b=3$

ومنه $\vec{n'}(4;3;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P')

الذي يشمل A و O .

ومنه معادلة (P') هي : $4x+3y+z=0$ (لأنه يشمل المبدأ O)

التمرين 12

$A(1;-1;1)$ ، $B(3;1;0)$ ، $C(0;2;1)$

تعيين المسافة بين C و (AB) :

لتكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

$\overrightarrow{AB}(2;2;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1;3;0)$

لدينا : $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=\left|2(-1)+2(3)+(-1).0\right|=4$

ومن جهة أخرى : $\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}\right|=AB.AH$

$=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}.AH$

$=\sqrt{9}.AH=3AH$

وعليه مما سبق : $3AH=4$ إذن : $AH=\dfrac{4}{3}$

في المثلث ACH القائم في H لدينا : $AC^2=AH^2+CH^2$

ومنه : $CH^2=AC^2-AH^2$

حيث $AC^2=(-1)^2+(3)^2+(0)^2=10$ ، $AH^2=\dfrac{16}{9}$

ومنه : $CH^2 = 10 - \frac{16}{9} = \frac{74}{9}$ ومنه : $CH = \frac{\sqrt{74}}{3}$

التمرين 13

حساب المسافة d بين A و (P) :

$$d = \frac{|5(0) - 1 + 3(-3)|}{\sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (3)^2}} = \frac{10}{\sqrt{35}} = \frac{10\sqrt{35}}{35} = \frac{2\sqrt{35}}{7}$$

التمرين 14

- نبين أن A, B, C تعين مستو وحيد :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-3;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;-2;2)$

إحداثيات $\overrightarrow{AB}$ ليست متناسبة مع إحداثيات $\overrightarrow{AC}$ وعليه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليس لهما نفس الحامل .

ومنه النقط A, B, C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

- نكتب معادلة (ABC) :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (ABC) .

معادلة (ABC) من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$

بما أن $A \in (ABC)$ فإن $a + 2b - c + d = 0 \ ...\ (1)$

بما أن $B \in (ABC)$ فإن $-b + c + d = 0 \ ...(2)$

بما أن $C \in (ABC)$ فإن $-2a + c + d = 0 \ ...\ (3)$

نطرح (3) من (2) نجد : $-b + 2a = 0$ ومنه : $b = 2a$

بالتعويض في (1) نجد : $5a - c + d = 0 \ ...\ (4)$

بجمع (3) و (4) نجد : $3a + 2d = 0$ ومنه : $d = \frac{-3}{2}a$

نعوض b و d بقيمتيهما في (2) فنجد : $-2a + c - \frac{3}{2}a = 0$

ومنه : $c = \frac{7}{2}a$

إذن معادلة المستوي هي : $ax + 2ay + \frac{7}{2}az - \frac{3}{2}a = 0$

$$a\left(x+2y+\frac{7}{2}z-\frac{3}{2}\right)=0$$

وعليه : $2x+4y+7z-3=0$

إذن معادلة (ABC) هي : $2x+4y+7z-3=0$

- المسافة بين D و (ABC) ولتكن d :

$$d=\frac{|2(1)+4(1)+7(9)-3|}{\sqrt{(2)^2+(4)^2+(7)^2}}=\frac{66}{\sqrt{69}}$$

$$d=\frac{66\sqrt{69}}{69}=\frac{22}{23}\sqrt{69}$$

التمرين15

تعيين محل النقط M :

لدينا : $\overrightarrow{MA}(5-x;2-y;-4-z)$ ، $\overrightarrow{MB}(2-x;3-y;-z)$

$\overrightarrow{MC}(-x;-5-y;1-z)$ ، $\overrightarrow{MD}(3-x;1-y;2-z)$

ومنه : $MA^2=(5-x)^2+(2-y)^2+(-4-z)^2$

$$MA^2=25-10x+x^2+4-4y+y^2+16+8z+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2-10x-4y+8z+45$$

$$MB^2=(2-x)^2+(3-y)^2+(-z)^2$$
$$=4-4x+x^2+9-6y+y^2+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2-4x-6y+13$$

$$MC^2=(-x)^2+(-5-y)^2+(1-z)^2$$
$$=x^2+25+10y+y^2+1-2z+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2+10y-2z+26$$

$$MD^2=(3-x)^2+(1-y)^2+(2-z)^2$$

$$=x^2+y^2+z^2-6x-2y-4z+14$$

ولدينا : $2MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = 20$

ومنه :

$$2\left(x^2+y^2+z^2-10x-4y+8z+45\right)-\left(x^2+y^2+z^2-4x-6y+13\right)$$

$$+x^2+y^2+z^2+10y-2z+26-\left(x^2+y^2+z^2-6x-2y-4z+14\right)=20$$

أي أن : $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 10y + 18z + 55 = 0$

$$(x-5)^2 - 25 + (y+5)^2 - 25 + (z+9)^2 - 81 + 55 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y+5)^2 + (z+9)^2 = 76$$

نفرض النقطة $I(5;-5;-9)$ فيكون : $IM^2 = 76$

وعليه مجموعة النقط هي سطح كرة مركزها I ونصف

قطرها $R = \sqrt{76}$. $R = 2\sqrt{19}$

التمرين 16

تعيين مجموعة النقط :

لدينا : $\overrightarrow{BM}(x-3;y+1;z-4)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-2;3)$

$\overrightarrow{AM}(x+1;y-2;z-1)$ ، $\overrightarrow{BC}(-2;1;0)$

$\overrightarrow{MC}(1-x;-y;4-z)$ ، $\overrightarrow{MB}(3-x;-1-y;4-z)$

$\overrightarrow{MA}(-x-1;-y+2;-z+1)$

1) $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$

$$(x-3)\times 2 + (y+1)\times(-2) + (z-4)\times 3 = 0$$

$$2x - 6 - 2y - 2 + 3z - 12 = 0$$

$$2x - 2y + 3z - 20 = 0$$

وهي معادلة مستو يشمل B و يعامد $\overrightarrow{AC}$ أي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{AC}$.

$2)\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC} = 10$

$$(x+1)(-2)+(y-2)(1)+(z-1)\times 0=10$$

$$-2x-2+y-12=0$$

$$-2x+y-14=0$$

وهي معادلة مستو شعاعه الناظمي $\overrightarrow{BC}$.

$3)\ AM^2 + BC^2 = 100$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+(-2)^2+(1)^2=100$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=95$$

وهي معادلة سطح كرة مركزها A ونصف قطرها $R=\sqrt{95}$.

$4)\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=0$

$$(3-x)(1-x)+(-1-y)(-y)+(4-z)(4-z)=0$$

$$3-4x+x^2+y+y^2+16-8z+z^2=0$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+y-8z+19=0$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+(z-4)^2-16+19=0$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-4)^2=16-19-\frac{1}{4}$$

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-4)^2=\frac{-13}{4}$$

مجموعة النقط خالية .

$5)\ \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=BC^2$

$$(-x-1)(3-x)+(-y+2)(-1-y)+(-z+1)(4-z)$$

$$=\left(\sqrt{(-2)^2+(1)^2+0^2}\right)^2$$

$$x^2-2x-3+y^2-y-2+z^2-5z+4=5$$

$$(x-1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-1=5$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=5+2-\frac{13}{2}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

مجموعة النقط هي سطح كرة مركزها $\omega\left(1;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$

التمرين 17

1) حساب $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}$:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DH}$$
$$=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}$$
$$=HA.HD.\cos\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HD}\right)$$

ولدينا $HD=m$ و $HA=\sqrt{HD^2+AD^2}=\sqrt{2m^2}=m\sqrt{2}$

و $\cos\left(\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}=m\sqrt{2}.m.\frac{\sqrt{2}}{2}=m^2$

2) حساب $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA}$:

المسقط العمودي للنقطة H على المستقيم (AB) هي النقطة A وعليه :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}=-BA.BA$$
$$=-m.m=-m^2$$

3) حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$:

لتكن I المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB) فتكون I منتصف $[AB]$

وعليه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=AB.AI=m.\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}$

4) حساب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}$:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{BG}=BF.BG.\cos\left(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{BG}\right)$$
$$=m.m\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=m^2$$

التمرين 18

لدينا في المعلم $(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$D(o;o;o) \quad ; \quad A(m;o;o) \quad ; \quad B(m;m;o)$$
$$C(o;m;o) \quad ; \quad E(m;o;m) \quad ; \quad F(m;m;m)$$
$$G(o;m;m) \quad ; \quad H(o;o;m) \quad ; \quad O\left(\frac{m}{2};\frac{m}{2};\frac{m}{2}\right)$$

وعليه نستنتج :

$$\overrightarrow{AG}(-m;m;m) \quad ; \overrightarrow{DG}(o;m;m) \quad ; \quad \overrightarrow{DC}(o;m;o)$$
$$\overrightarrow{AO}\left(\frac{-m}{2};\frac{m}{2};\frac{m}{2}\right) \quad ; \quad \overrightarrow{AB}(o;m;o) \quad ; \quad \overrightarrow{EC}(-m;m;-m)$$
$$\overrightarrow{GC}(o;o;-m) \quad ; \quad \overrightarrow{HF}(m;m;o) \quad ; \quad \overrightarrow{BG}(-m;o;m)$$

وبالتالي :

1) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = m^2$ 2) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{EC} = m^2$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = \frac{m^2}{2}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BG} = 0$

5) $\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{GC} = 0$